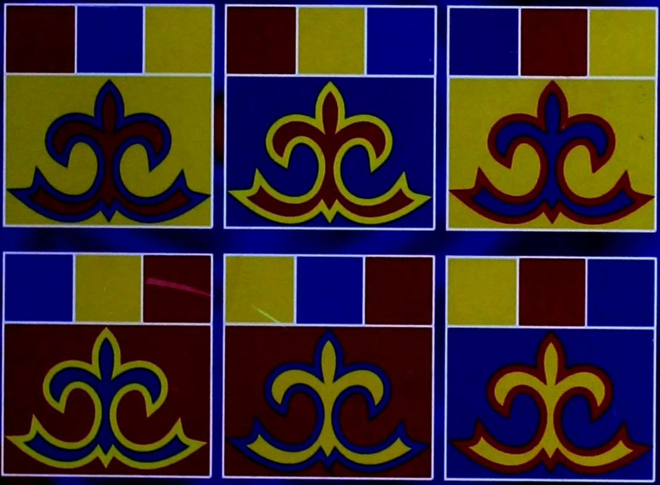
К. БАЙГАЗИЕВ

КОМБИНАТОРИКАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ



ОШ 2016

УДК 51
ББК 22.14
Б18

Сын-пикирчилер:
М. Ш. Мамаюсупов – физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент (Ош МУ);
А. О. Кыбыраев – физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент (РМСУнун Оштогу филиалы).

Байгазиев К.
Б18 **Комбинаториканын элементтери** – Ош: «Кагаз ресурстары» басмасы, 2016. – 130 бет.
ISBN 978-9967-471-14-6

Бул окуу куралында «Педагогикалык билим берүү» багытынын «Башталгыч билим берүү» профилинде үйрөтүлүүчү «Математиканын башталгыч курсунун теориялык негиздери» дисциплинасынын «Комбинаториканын элементтери» главасы каралган. Анын материалдары көптүктөр теориясынын түшүнүктөрүн пайдалануу менен баяндалды жана практикалык маселелерди чечүү үчүн теориялык билимдердин конкреттүү колдонулуштары көрсөтүлдү.

Окуу куралы ЖОЖдордун «Башталгыч билим берүү» профилинин жана атайын орто окуу жайларынын «Башталгыч класстарда окутуу» адистигинин студенттерине жана окутуучуларына, орто жана башталгыч мектептердин мугалимдерине, ошондой эле мектеп окуучуларына арналат.

УДК 51
ББК 22.14

Б 1602100000-16
ISBN 978-9967-471-14-6

КИРИШҮҮ

«Комбинаториканын элементтери» аттуу эмгек «Педагогикалык билим берүү» багытынын «Башталгыч билим берүү» профилинде үйрөтүлүүчү «Математиканын башталгыч курсунун теориялык негиздери» дисциплинасынын бир бөлүмү болуп эсептелет.

Азыркы учурда комбинаторика математика илиминин маанилүү бөлүмдөрүнүн бири катары каралат. Анын методдору практикалык жана теориялык маселелерди чечүүдө кеңири пайдаланылууда. Комбинаториканын математиканын башка бөлүмдөрү менен байланыштары да аныкталган. Алар: ыктымалдыктар теориясы, математикалык статистика, оюндар теориясы, ж.б. Математиканын бул бөлүмдөрүн бириктирип ***стохастика***[1] термини менен атоо кабыл алынган. Учурда мектеп математикасынын билим берүү программаларына комбинаториканын, математикалык статистиканын жана ыктымалдыктар теориясынын элементтери активдүү киргизилүүдө. Мына ошондуктан математиканын башталгыч курсунда комбинаторикалык маселелердин ролу тынымсыз өсүүдө. Анткени окуучулардын ойломун ар тараптан өнүктүрүүнүн, стохастиканын кийинки бөлүмдөрүн үйрөнүүгө жана күндөлүк турмушта пайда болгон проблемаларды чечүүгө аларды даярдоонун каражаты катары комбинаториканын чоң мүмкүнчүлүктөрү бар.

Комбинаторикалык маселелерди чыгаруу көптүктөр теориясынын көз карашы боюнча белгилүү бир касиеттерге ээ болгон кандайдыр бир чектүү көптүктөрдүн камтылуучу көптүктөрүн жана иреттелген көптүктөрдү тандап алууга, ошондой эле алардын сандарын аныктоого алып келет. Ошондуктан көптүктөр теориясы

[1]стохастика – *stochastikos* – грек сөзү, таба билген, ойлоно билген, кокустук, мүмкүндүк, баш аламандык, күтүлбөгөндүк.

комбинаториканын пайдубалы катары саналат.

Математиканын башталгыч курсундагы комбинаторикалык маселелер эреже катары тандоо ыкмасы менен чыгарылат. Бул процессти жеңилдетүү үчүн таблицалар жана графтар же «варианттардын дарагы» деп аталуучу схема көп пайдаланылат. Мына ушул сыяктуу маселелерди чыгаруу үчүн башталгыч мектептин болочок мугалимине комбинаториканын негиздери боюнча билимдер, билгичтиктер жана көндүмдөр зарыл.

Окуу куралында теориялык материалдар менен катар ар бир тема боюнча студенттердин билгичтиктерин, көндүмдөрүн калыптандыруу жана бышыктоо үчүн көнүгүүлөр, сынактарга жана зачетторго даярданууга көмөк көрсөтүүчү өзүн-өзү текшерүү үчүн тесттик суроолор жооптору менен берилген.

I ГЛАВА

КӨПТҮКТӨР ЖАНА АЛАРДЫН ҮСТҮНӨН ЖҮРГҮЗҮЛҮҮЧҮ АМАЛДАР

1.1. КӨПТҮКТӨР ТҮШҮНҮГҮ

XIX кылымдын аягында математика илиминде функция, үзгүлтүксүздүк ж.б.у.с. негизги түшүнүктөрдүн маанисин тактоо зарылдыгы келип чыккан. Бул үчүн натуралдык сан түшүнүгүн так аныктоо керек болгон. Мына ушундай татаал суроолорго жооп издөө математикалык идеялардын өнүгүшүнө мүмкүндүк түзгөн. Ошондуктан XIX кылымдын аягында, XXI кылымдын башында математикалык билимдердин бардык тармактарында эски түшүнүктөр кайрадан каралып, такталып чыккан. Натыйжада XIX кылымдын аягында математиканын жаңы тармагы – көптүктөр теориясы пайда болгон. Анын түзүүчүлөрүнүн бири – немец математиги Георг Кантор. Кыска мөөнөттүн ичинде көптүктөр теориясы бүтүндөй математиканын пайдубалы болуп калды.

Кандайдыр бир белгилери боюнча бириккен бир тектүү объектилердин тобу ***көптүк*** катары эсептелет. Көптүк түшүнүгү математиканын негизги түшүнүктөрүнүн бири жана ал анын башка түшүнүктөрү аркылуу аныкталбайт. Аларды мисалдардын жардамында түшүндүрөлү. Мисалы, кыргыз алфавитиндеги үндүү тыбыштардын көптүгү жөнүндө, $4x - 3 = 21$ теңдемесинин чечимдеринин көптүгү жөнүндө, $7x + 1 > x + 25$ барабарсыздыгынын чечимдеринин көптүгү жөнүндө, кандайдыр бир мектептин окуучуларынын көптүгү жөнүндө, берилген аудиториядагы орундуктардын көптүгү жөнүндө ж.б. көптүктөр жөнүндө айтууга болот. Күндөлүк турмушта «көптүк» сөзүнүн ордуна «топ», «жыйын», «класс», «компания», «коллекция», «бада», «үйүр», «отор» ж.б. сөздөрү колдонулат. Бул сөздөр «көптүк» сөзү сыяктуу эле мааниге ээ. Демек, бир тектүү объектилердин (предметтердин) жыйындысын ***көптүк*** катары түшүнүүгө болот.

Көптүктөрдү латындын чоң тамгалары менен белгилөө кабыл алынган: $A, B, C, \dots$.

1-аныктама. Көптүктү түзгөн объектилер (адамдар, үйлөр, китептер, геометриялык фигуралар, сандар, ж.б.) ***элементтери*** деп аталат.

Көптүктүн элементтери латындын кичине тамгалары менен белгиленет: $a, b, c, \dots$.

Мисалы, 3 саны натуралдык сандардын көптүгүнүн элементи, март – жылдын айларынын көптүгүнүн элементи. Көптүк жана анын элеметтеринин арасындагы катыш (байланыш) ***элементи болот, элементи болуп эсептелет*** жана ***таандык*** сөздөрү аркылуу туюндурулат. Мисалы, 6 саны натуралдык сандардын көптүгүнө таандык деп айтууга болот.

Көптүктөр жана алардын элементтери жөнүндөгү ар түрдүү айтымдарды (сүйлөмдөрдү) кыскартып жазуу үчүн төмөнкүдөй символика колдонулат: ***таандык*** сөзүн $\in$ белгиси менен алмаштырышат.

«x объектиси A көптүгүнө таандык» айтымын (сүйлөмүн) $x \in A$ деп жазышат. Мында $\in$ символу – таандык белгиси. $x \in A$ жазуусун «x объектиси A көптүгүнүн элементи болот» же «x элементи A көптүгүнө кирет» же «x элементи A көптүгүнө тийешелүү» деп да окууга болот.

«x объектиси A көптүгүнө таандык эмес» айтымын (сүйлөмүн) $x \notin A$ деп жазышат. $x \notin A$ жазуусун башкача да окууга болот: «x объектиси A көптүгүнө кирбейт» же «x объектиси A көптүгүнө тийешелүү эмес».

Мисалы, A көптүгү – так натуралдык сандардын көптүгү болсун, анда A көптүгүнүн элементтери жөнүндөгү төмөндөгү айтымдар (сүйлөмдөр) туура болот: $23 \in A$, $245 \in A$, $18 \notin A$, $2\frac{3}{5} \notin A$.

Көптүк бир элементтен турушу да мүмкүн. Мисалы, «кар» сөзүндөгү үндүү тамгалардын көптүгү бир элементтен – «а» тамгасынан турат.

Математикада бир да элементке ээ болбогон көптүктөр да каралат.

2-аныктама. Бир да элементке ээ болбогон көптүк ***бош көптүк*** деп аталат жана $\emptyset$ символу менен белгиленет.

Бош көптүктөргө мисалдар келтирели: Күндө жашаган адамдардын көптүгү, 2 жана 3 натуралдык сандарынын арасында жайланышкан натуралдык сандардын көптүгү, $5x + 8 = 5(x - 12)$ теңдемесинин чыныгы чечимдеринин көптүгү.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Төмөнкү көптүктөрдүн төрт элементин атагыла:

а) башталгыч мектепте окутулуучу предметтер;

б) так натуралдык сандар;

в) жуманын күндөрү;

г) жылдын мезгилдери.

2. Символдордун жардамында жазгыла:

а) 15 натуралдык сан;

б) 9 натуралдык сан эмес;

в) -8 натуралдык сан;

г) 0 чыныгы сан;

д) $3\frac{4}{7}$ рационалдык сан.

3. Төмөнкү сүйлөмдөрдү окугула жана алардын тууралары көрсөткүлө:

а) $128 \in N$;	г) $4{,}7 \in Z$;	ж) $-5{,}9 \in R$;
б) $-24 \in N$;	д) $4{,}7 \in Q$;	з) $5\frac{4}{7} \notin N$;
в) $-24 \in Z$;	е) $35 \notin R$;	и) $0 \in N$.

4. 0; 3; -8; 5,4; 16; 96; 264; $\sqrt{3}$ сандары берилген. Алардын кайсынысы төмөнкү көптүктөргө кирет:

а) натуралдык; в) рационалдык;

б) бүтүн; г) чыныгы.

5. «Математика» сөзүндөгү тамгалардын жана 45 894 542 саныңдагы цифралардын көптүгүн жазгыла.

1.2. КӨПТҮКТӨРДҮН БЕРИЛҮҮ ЫКМАЛАРЫ

Эгерде каалаган элементтин бул көптүккө таандык же таандык эмес экендигин айтууга мүмкүн болсо, анда көптүктү *берилди* деп эсептейбиз. Көптүктү анын бардык *элементтерин саноо ыкмасы* менен берүүгө болот. Мисалы, A көптүгү a, b, c, d ар түрдүү элементтеринен турсун. Анын элементтерин саноо аркылуу аныктоого болот. Бул учурда элементтерин саноо аркылуу аныкталган A көптүгүн $A = \{a, b, c, d\}$ деп жазууга болот жана ал элементтери a, b, c, d болгон A көптүгү деп окулат. Көптүктүн белгиленишинен кийин «барабардык», андан ары ар бир элементинен кийин үтүр белгиси коюлат жана алар фигуралык кашаага алынып жазылат.

Бул ыкма менен көптүктөрдүн берилиши элементтеринин саны анча көп болбогон чектүү көптүктөр үчүн гана колдонулат.

Эгерде көптүк чексиз болсо, анда анын элементтерин саноо ыкмасы менен берүү мүмкүн эмес. Элементтеринин саны көп болгон чектүү көптүктөрдү да саноо ыкмасы менен берүү кыйынчылыктарды жаратат.

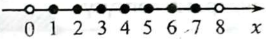
Мындай учурда көптүк башка ыкма менен берилет: ***анын элементтеринин мүнөздүк касиети көрсөтүлөт.***

3-аныктама. Берилген көптүктүн бардык элементтери гана ээ болгон касиет көптүктүн ***мүнөздүк касиети*** деп аталат.

Мисалы, M көптүгү 8 ден кичине болгон натуралдык сандардын көптүгү болсун. Бул көптүк мүнөздүк касиети менен берилген. M көптүгүнүн бардык элементтери ээ болгон «8ден кичине болгон бир орундуу натуралдык сан» болуу деген мүнөздүк касиети көрсөтүлгөн. Бул касиет M көптүгүнүн кандайдыр бир объектисинин берилген көптүккө тийешелүү же тийешелүү эмес экендигин аныктайт. Маселен, 5 саны M көптүгүнө кирет, анткени ал бир орундуу сан жана 8ден кичине.

Ал эми 8 саны бул көптүккө кирбейт, анткени ал 7ден чоң. Бул учурда M көптүгүнүн элементтерин санап көрсөтүүгө да болот:

$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (1-сүрөт).



1-сүрөт

Мүнөздүк касиети менен берилген көптүктөр шарттуу түрдө төмөнкүдөй белгиленет: фигуралык кашаанын ичине элементтин белгилениши жазылат, артына тик сызыкча коюлат, андан кийин берилген көптүктүн элементтери гана ээ болгон касиет жазылат. Мисалы, M «8ден кичине болгон натуралдык сандардын көптүгү» болсун. Ал мындай жазылат:

$$M = \{x | x \in N \text{ жана } x < 8\} \text{ же } M = \{x | x \in N, x < 8\}.$$

Мына ошентип, кандайдыр бир көптүктү түзүү үчүн анын элементтерин саноо же анын элементтеринин мүнөздүк касиеттерин көрсөтүү керек.

Көптүктөрдүн берилишинин бир ыкмасынан экинчи бир ыкмасына өтүү билгичтиги өтө маанилүү. Математиканын башталгыч курсунда ушундай мүнөздөгү көнүгүүлөр көп аткарылат.

1- мисал. 42ден чоң, ал эми 52ден кичине болгон сандарды жазгыла.

Чыгаруу. Көптүк «42ден чоң, ал эми 52ден кичине сан» болуу деген мүнөздүк касиети менен берилген. Көптүктүн бардык элементин саноо талап кылынат: 43, 44, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51.

2- мисал. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$ көптүгүнүн элементтеринин мүнөздүк касиетин көрсөткүлө жана мүнөздүк касиети менен берилишин жазгыла.

Чыгаруу. A көптүгүнүн бардык элементтери саналган. Анын элементтеринин мүнөздүк касиети: «3кө эселүү болуу жана 21 натуралдык санынан ашпоо». Мүнөздүк касиети менен жазылышы: $A = \{x | x = 3n, n \in N, 1 \le n \le 7\}$.

Сандардан турган көптүктөрдү *сандык көптүктөр* деп аташат. Сандык көптүктөр төмөнкүдөй белгиленет:

а) N – натуралдык сандардын көптүгү;

б) Z_+ – терс эмес бүтүн сандардын көптүгү;

в) Z – бүтүн сандардын көптүгү;

г) Q – рационалдык сандардын көптүгү;

д) I – иррационалдык сандардын көптүгү;

е) R – чыныгы сандардын көптүгү.

КӨНҮГҮҮЛӨР

6. Барабардык белгисинин жана фигуралык кашаалардын жардамында төмөнкү сүйлөмдөрдү жазгыла:

а) A – 1, 2, 3, 4, 5, 6 сандарынын көптүгү;

б) B – a, b, c, d тамгаларынын көптүгү.

7. Эгерде A көптүгү натуралдык сандар болсо, анда символдорду пайдаланып төмөнкү көптүктөрдү жазгыла:

а) 50дөн чоң, ал эми 60тан кичине болгон натуралдык сандар;

б) 20дан кичине болгон натуралдык сандар.

8. Төмөнкү көптүктөрдүн элементтерин санагыла:

A – бир орундуу жуп натуралдык сандардын көптүгү;

B – 15тен ашпаган натуралдык сандардын көптүгү;

C – 4кө бөлүнүүчү 25ке чейинки натуралдык сандардын көптүгү.

9. Төмөнкү көптүктөрдүн мүнөздүк касиеттерин көрсөткүлө:

а) {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99};

б) {20, 22, 24, 26, 28};

в) {а, е, ё, и, о, ө, у, ү, ы, э, ю, я}.

10. Эгерде x чыныгы сан болсо, анда төмөнкү барабарсыздыктардын чечимдеринин көптүгүн координаталык түз сызыкта сүрөттөгүлө:

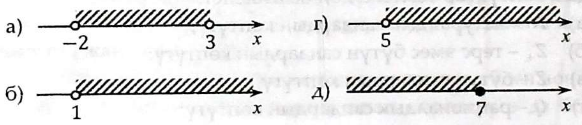
а) $x > 7$;

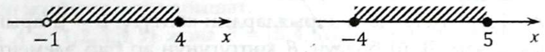
б) $x \leq -2,5$;

в) $4,3 \leq x < 9,5$;

г) $-2,4 < x \leq 3,7$.

11. Координаталык түз сызыкта белгиленген көптүктөрдү мүнөздүк касиети боюнча берилиштерин жазгыла (2-сүрөт):



в) 

2-сүрөт

12. Төмөнкү көптүктөрдү символдорду пайдаланып, эки түрдүү ыкма менен жазгыла:

а) 9 дан кичине болгон натуралдык сандар;

б) 4 төн чоң, ал эми 10дон ашпаган натуралдык сандар;

в) - 5тен чоң же барабар, ал эми 6дан ашпаган чыныгы сандар;

г) 48 санынын бөлүүчүлөрү;

д) 60тан ашпаган 4 санынын бөлүнүүчүлөрү;

е) $x^2 - 5x + 6 = 0$ теңдемесинин чечимдери.

1.3. КӨПТҮКТӨРДҮН АРАСЫНДАГЫ КАТЫШТАР. ЭЙЛЕР-ВЕННДИН ДИАГРАММАСЫ

Көптүктөрдүн катыштарын жана алардын арасындагы өз ара байланыштарын карайлы. Маселен, бардык натуралдык сандар бүтүн сандар боло тургандыгы белгилүү. Көптүктөр түшүнүгү ар түрдүү топтордун арасындагы өз ара байланыштардын конкреттүү учурларын жалпылоого мүмкүндүк түзөт.

Эгерде A жана B көптүктөрү жалпы элементтерге ээ, б.а. бир учурда элементтери A га да, B га да таандык болсо, анда бул көптүктөр *кесилишет* (3-сүрөт, *б*).

Маселен, $A = \{x, y, z, t, s\}$, $B = \{y, t, k, m\}$ жана $C = \{a, b, c\}$ көптүктөрү берилсин. y жана t деген жалпы элементтери болгондуктан, A жана B көптүктөрү кесилишет. A жана C, B жана C көптүктөрү кесилишпейт, анткени алар жалпы элементтерге ээ эмес.

$A = \{m, n, x, y, z\}$ жана $B = \{m, n, y\}$ көптүктөрүн карайлы. Бул көптүктөр кесилишет. Андан сырткары, B көптүгүнүн ар бир элементи A көптүгүнүн да элементи болуп саналат. Бул учурда B көптүгү A көптүгүнө камтылат же A көптүгү B көптүгүн камтыйт деп айтышат (3-сүрөт, *д*).

Дагы бир мисал келтирели.

A – Кыргызстандагы дарыялардын көптүгү, B = {Нарын, Кара-Дарыя, Жазы, Чүй} болсун. B көптүгүнүн ар бир элементи Кыргызстанда аккан дарыя болгондуктан, B көптүгү A көптүгүнүн бөлүгү болуп эсептелет. Мындай учурда, B көптүгү A көптүгүнүн камтылуучу көптүгү болот.

4-аныктама. Эгерде A көптүгүнүн ар бир элементи B көптүгүнүн да элементи болсо, анда A көптүгү B көптүгүнүн ***камтылуучу көптүгү*** деп аталат.

Аны $A \subset B$ деп белгилешет жана «A көптүгү B көптүгүнүн камтылуучу көптүгү» же «A көптүгү B көптүгүнө камтылат» деп окушат. Мында $\subset$ символу – камтылуу катышы. Бул сүйлөмдөр (айтымдар) төмөнкү сүйлөмгө (айтымга) эквиваленттүү: «B көптүгү A көптүгүн камтыйт», б.а., $B \supset A$ (3-сүрөт, *в*)

Камтылуучу көптүктөрдүн аныктамасына ылайык ар бир көптүк өзүнө-өзүн камтылат: $A \subset A$. Андан сырткары, бош көптүк ар кандай A көптүгүнүн камтылуучу көптүгү болуп эсептелет: $\emptyset \subset A$.

A жана $\emptyset$ көптүктөрүн A көптүгүнүн *өздүк эмес камтылуучу көптүктөрү,* ал эми калган бардык көптүктөрдү A көптүгүнүн *өздүк камтылуучу көптүктөрү* деп аташат.

$A = \{a, b, c\}$ көптүгүнүн бардык камтылуучу көптүктөрүн түзөлү. Анда $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ – A көптөгүнүн бир элементтүү камтылуучу көптүктөрү, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ – A көптөгүнүн эки элементтүү камтылуучу көптүктөрү, ошондой эле $\{a, b, c\}$ же A көптөгүнүн өзү жана $\emptyset$ көптүктөрү A көптүгүнүн өздүк эмес камтылуучу көптүктөрү болушат. Мына ошентип, A көптүгү 8 камтылуучу көптүккө ээ болду.

Эгерде A көптүгү n элементтен турса, анда ал 2^n сандагы ар түрдүү камтылуучу көптүктөрдөн турары далилденген.

$\emptyset$ көптүк бир да элементке ээ болбогондуктан, аны ар кандай көптүктүн камтылуучу көптүгү катары эсептөөгө болот.

Эгерде $B \subset A$ жана $A \subset B$ болсо, анда $A = B$ барабардыгы орун алат. Бул сүйлөмдөн эки көптүктүн барабардыгын далилдөөнүн ыкмаларынын бири келип чыгат: эгерде B көптүгүнүн ар бир элементи A көптүгүнүн да, өз кезегинде, A көптүгүнүн ар бир элементи B көптүгүнүн да элементи экендиги далилденсе, анда $A = B$ болот деп жыйынтык чыгарышат.

Эми $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ жана $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ көптүктөрүн карайлы. Бул көптүктөр кесилишет жана A көптүгүнүн ар бир элементи B көптүгүнүн да элементи, б.а. $A \subset B$ болот. Тескерисинче, B көптүгүнүн ар бир элементи A көптүгүнүн да элементи, б.а. $B \subset A$ болот. Бул учурда, A жана B көптүктөрүн *барабар* көптүктөр деп айтышат (3-сүрөт, *е*).

5-аныктама. Эгерде $B \subset A$ жана $A \subset B$ болсо, анда A жана B көптүктөрү ***барабар көптүктөр*** деп аталат.

Мындай учурда $A = B$ деп жазышат.

Көптүктөрдүн барабардыгынын башкача аныктамасын берүүгө болот.

5а-аныктама. Бирдей элементтерден турган A жана B көптүктөрү ***барабар көптүктөр*** деп аталат.

Мисалы, $A = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ жана $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2\}$ барабар, анткени алар бирдей элементтерден турат.

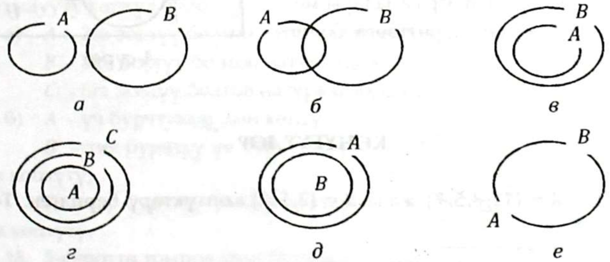
Барабардык катышы төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

1°. $\forall A: A = A$ – барабардык катышы рефлексивдүү;

2°. $\forall A, B: A = B \Rightarrow B = A$ – барабардык катышы симметриялуу;

3°. $\forall A, B, C: A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$ – барабардык катышы транзитивдүү.

Бул касиеттердин тууралыгы көптүктөрдүн барабардыгынын аныктамасынан келип чыгат.



3-сүрөт

Көптүктөрдү жана алардын арасындагы катыштарды өзгөчө чиймелердин жардамында көрсөтмөлүү сүрөттөшөт. Көптүктөрдүн мындай сүрөттөлүшүн *Эйлер–Венндин*[1] *диаграммалары* (же *Эйлердин тегеректчелери, же Венндин диаграммалары*) деп аташат.

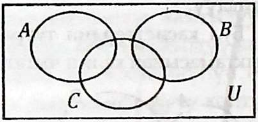
Мисалы, A көптүгү B көптүгүнүн камтылуучу көптүгү экендигин көрсөтмөлүү сүрөттөөнү кааласак, анда бул көптүктөрдү 3-*в* сүрөттөгүдөй чийебиз. Эгерде A жана B көптүктөрүнүн жалпы элементтерге ээ эмес экендиктерин көрсөтүү керек болсо, анда бул көптүктөрдү 3-*а* сүрөттөгүдөй чийебиз.

Бир эле U көптүгүнүн камтылуучу көптүктөрүн гана караган учурлар көп кездешет. Мындай U көптүгүн *универсалдык көптүк* деп аташат.

6-аныктама. Берилген учурда каралып жаткан камтылуучу көптүктөрдү камтыган көптүк ***универсалдык көптүк*** деп аталат.

Мисалы, эгерде A – педагогика жана дене тарбия факультетинин студент балдарынын, B – ушул эле факультеттин I курсунун студент кыздарынын, C – факультеттеги спортсмендердин көптүктөрү болсо, анда U универсалдык көптүгү катары аталган факультеттин бардык студенттеринин көптүгүн алууга болот. Мына ошондуктан $A \subset U, B \subset U, C \subset U$. U универсалдык көптүгү тик бурчтук, ал эми камтылуучу көптүктөрү тегеректчелер көрүнүшүндө сүрөттөлөт.

Маселен, аталган факультеттин студенттери жөнүндөгү мисалды Эйлер-Венндин диаграммалары менен төмөнкүдөй сүрөттөөгө болот (4-сүрөт).



4-сүрөт

КӨНҮГҮҮЛӨР

13. $A = \{11, 3, 5, 7\}$ жана $B = \{3, 5, 7\}$ көптүктөрү берилген. Тө-

[1] Эйлер Леонард (1707–1783) – швейцариялык математик, Петербург илимдер Академиясынын мүчөсү; Венн Джон (1834–1923) – англиялык математик.

мөнкү талаптар туурабы?

а) A жана B көптүктөрү кесилишет;

б) A көптүгү B көптүгүн камтыйт;

г) $X = \{7, 5, 1, 3\}$ көптүгү A көптүгүнө барабар?

14. $A = \{136, 153, 145, 126, 216, 252, 288\}$ көптүгүнүн элементтеринин ичинен төмөнкү сандарга бөлүнө тургандарын жазгыла:

а) 3кө бөлүнөт; в) 9га бөлүнөт;
б) 4кө бөлүнөт; г) 6га бөлүнөт.

Алынган камтылуучу көптүктөрдүн ичинде A көптүгүнө барабары барбы?

15. X жана Y көптүктөрүнүн арасындагы катыштарды Эйлердин тегеректелери менен сүрөттөгүлө:

а) X – эки орундуу сандар,
$Y = \{7, 52, 41, 63, 76\}$;

б) X – эки орундуу сандар,
Y – жуп натуралдык сандар;

в) X – эки орундуу сандар,
Y – үч орундуу сандар;

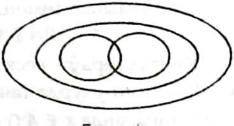
г) X – эки орундуу сандар,
Y – так натуралдык сандар.

16. $A = \{6, 7, 8, 9\}$ көптүгү берилген. Анын бардык мүмкүн болгон камтылуучу көптүктөрүн түзгүлө. Алар канча болууга тийиш?

17. Берилген көптүктөрдүн кайсынысынын бири экинчисине камтылуучу көптүк болот?

а) A – 2ге эселүү болгон натуралдык сандар;
B – 3кө эселүү болгон натуралдык сандар;
C – 6га эселүү болгон натуралдык сандар.

б) A – үч бурчтуктардын көптүгү;
B – тик бурчтуу үч бурчтуктардын көптүгү;
C – тар бурчтуу үч бурчтуктардын көптүгү.



5-сүрөт

18. 5-сүрөттө томпок төрт бурчтуктардын, параллелограммдардын, тик бурчтуктардын, ромбдордун жана квадраттардын көптүктөрүнүн арасындагы катыштар сүрөттөлгөн. Ал көптүктөрдүн ар бирин көрсөткүлө.

19. Төмөнкү көптүктөрдүн арасындагы катыштарды аныктагыла жана аларды Эйлердин тегеректелери менен сүрөттөгүлө:

а) 36 жана 48 сандарынын натуралдык бөлүүчүлөрү;

б) бир орундуу жана жөнөкөй сандар;

в) төрт бурчтук жана трапеция.

20. Башталгыч мектептин окуулуктарынан берилген көптүктүн элементтеринен камтылуучу көптүктөрдү түзүүгө байланышкан мисалдарды тапкыла жана аларды чыгаргыла.

1.4. КӨПТҮКТӨРДҮН КЕСИЛИШИ

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ – 24 санынын натуралдык бөлүүчүлөрүнүн көптүгү, ал эми $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ – 18 санынын натуралдык бөлүүчүлөрүнүн көптүгү болсун.

A жана B көптүктөрүнүн жалпы элементтеринен турган көптүк түзөлү. Жаңы алынган $\{1, 2, 3, 6\}$ көптүгү A жана B көптүктөрүнүн *кесилиши* болот.

7-аныктама. Бир эле учурда A жана B көптүктөрүнө тийешелүү болгон элементтерден түзүлгөн көптүк A жана B ***көптүктөрүнүн кесилиши*** деп аталат.

A жана B көптүктөрүнүн кесилиши $A \cap B$ деп белгиленет, мында $\cap$ символу – көптүктөрдүн кесилишинин белгиси.

1-мисал. $A = \{a, b, c, d, e\}$ жана $B = \{b, d, e, f\}$ көптүктөрүнүн кесилишин тапкыла. $A \cap B = \{b, d, e\}$.

Эки көптүктүн кесилишинин аныктамасын мүнөздүк касиетинин жардамында төмөндөгүдөй жазууга болот:

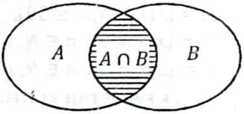
$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x | x \in A \text{ жана } x \in B\}. \qquad (1)$$

Көптүктөрдүн кесилишинин аныктамасы боюнча $x \in A$ жана $x \in B$ болгон учурда гана $x \in A \cap B$ болот. Эгерде $x \notin A$ жана $x \notin B$ болсо гана, анда $x \notin A \cap B$ болот.

Эгерде A жана B көптүктөрү жалпы элементтерге ээ болбосо, анда бул көптүктөр кесилишпейт жана $A \cap B = \emptyset$ деп белгиленет.

Мисалы, параллелограммдардын жана үч бурчтуктардын көптүктөрү кесилишпейт.

Эгерде A жана B көптүктөрү жок дегенде бир жалпы элементке ээ болушса, анда бул көптүктөр кесилишет же бул көптүктүрдүн кесилиши *бош эмес* болот жана $A \cap B \neq \emptyset$ деп жазылат.



6-сүрөт

6-сүрөттө A жана B көптүктөрүнүн кесилиши, б.а. $A \cap B$ көптүгү штрихтер менен көрсөтүлдү.

Көптүктөрдүн кесилиши амалын ар кандай чектүү сандагы көптүктөр үчүн жалпылоого болот:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \overset{\text{def}}{=} \{x | x \in A_1 \land x \in A_2 \land \ldots \land x \in A_n\}. \qquad (2)$$

КӨНҮГҮҮЛӨР

21. Төмөнкү көптүктөрдүн кесилишин тапкыла:

а) $A = \{a, b, c, d, f, m\}$ жана $B = \{a, c, f, x, y\}$;

б) $A = \{x | x \in N, x < 15\}$ жана $B = \{x | x \in N, x \leq 10\}$;

в) $A = \{x | x \in N, 3 \leq x \leq 10\}$ жана $B = \{x | x \in N, 3 < x \leq 12\}$;

г) $A = \{x | x = 2n, n \in N, \ 4 < n \leq 9\}$ жана
$B = \{x | x = 3n, n \in N, 3 \leq n < 8\}$;

д) $A = \{x | x \in N\}$ жана $B = \{x | x \in Z_+\}$;

22. A жана B көптүктөрү берилген. Эгерде: а) $A \subset B$; б) $B \subset A$; в) $A \cap B = \emptyset$; г) $A = B$ болсо, анда бул көптүктөрдү Эйлер-Венндин тегерекчелери аркылуу сүрөттөгүлө.

23. «Китепкана» жана «информатика» сөздөрүнүн тамгаларынын көптүктөрүнүн кесилишин тапкыла.

24. Координаталык түз сызыкта төмөнкү көптүктөрдүн кесилишин сүрөттөгүлө:

а) $A = \{x | x \in Z, x > -3\}, B = \{x | x \in Z, x \leq 5\}$;

б) $A = \{x | x \in N, x > 4\}, B = \{x | x \in Z, x \leq 12\}$;

в) $A = \{x | x \in R, x \geq -5\}, B = \{x | x \in R, x \leq 10\}$;

г) $A = \{x | x \in R, -2 \leq x < 6\}, B = \{x | x \in R, 0 < x \leq 7\}$;

д) $A = \left\{x \middle| x \in R, -3\frac{1}{4} < x \leq 4\frac{2}{3}\right\}, B = \left\{x \middle| x \in R, -2\frac{1}{2} \leq x < 5\frac{3}{4}\right\}$.

25. Эгерде

$A = \{x|x \in N, x \leq 30\}$,

$B = \{x|x = 2n, n \in N, x \leq 30\}$,

$C = \{x|x = 3n, n \in N, x \leq 30\}$ болсо, анда $A \cap B \cap C$ көптүгүнүн мүнөздүк касиетин атагыла.

26. $A \cap B$ көптүгүн тапкыла жана аны координаталык түз сызыкта сүрөттөгүлө:

а) $A = \{x|x \in R, 2x - 3 \geq 5\}$,
$B = \{x|x \in R, 3 - 2x \geq -5x + 15\}$;

б) $A = \{x|x \in R, 4x + 5 < 29\}$,
$B = \{x|x \in R, 2x - 1 > -4x - 17\}$.

1.5. КӨПТҮКТӨРДҮН БИРИГҮҮСҮ

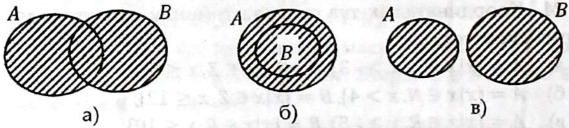
Берилген эки көптүктөн жаңы көптүктү алуунун ыкмаларынын дагы бирин карайлы.

8-аныктама. Эки A жана B көптүктөрүнүн жок дегенде бирине таандык болгон элементтерден түзүлгөн көптүк бул ***көптүктөрдүн биригүүсү*** деп аталат.

A жана B көптүктөрүнүн биригүүсү $A \cup B$ деп белгиленет. Мында $\cup$ символу көптүктөрдүн биригүүсүнүн белгиси.

1-мисал. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ жана $B = \{3, 5, 7\}$ көптүктөрү берилсин. Бул көптүктөрдүн биригүүсүн тапкыла. Анда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ көптүгүнө ээ болобуз.

7-сүрөттө (а – в) штрихтелген область менен $A \cup B$ көптүгү сүрөттөлгөн.



7-сүрөт

A жана B көптүктөрүнүн бириктүүсүнүн аныктамасы боюнча бириктүүгө B көптүгүнө кирбеген A көптүгүнүн элементтери, A көптүгүнө кирбеген B көптүгүнүн элементтери жана бир учурда жана B көптүктөрүнө тийешелүү болгон элементтер кирет.

Эки көптүктүн бириктүүсүнүн аныктамасын төмөнкүдөй жазууга болот:

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x | x \in A \text{ же } x \in B\}. \qquad (3)$$

Көптүктөрдүн бириктүүсүнүн аныктамасына ылайык $x \in A$ же $x \in B$ болгон учурда гана $x \in A \cup B$ болот. Эгерде $x \notin A$ же $x \notin B$ болсо гана, анда $x \notin A \cup B$ болот.

Көптүктөрдүн бириктүүсү амалын ар кандай чектүү сандагы көптүктөр үчүн жалпылоого болот:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \overset{\text{def}}{=} \{x | x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}. \qquad (4)$$

КӨНҮГҮҮЛӨР

27. Төмөнкү көптүктөрдүн бириктүүсүн тапкыла:

а) $A = \{a, b, c, d, f, m\}$ жана $B = \{a, c, f, x, y\}$;

б) $A = \{x | x \in N, x < 15\}$ жана $B = \{x | x \in N, x \leq 10\}$;

в) $A = \{x | x \in N, 4 \leq x < 9\}$ жана $B = \{x | x \in N, 4 < x \leq 10\}$;

г) $A = \{x | x = 2n, n \in N, 4 < n \leq 12\}$ жана
$B = \{x | x = 3n, n \in N,\ 3 < n \leq 18\}$;

д) $A = \{x | x \in N\}$ жана $B = \{x | x \in Z\}$.

28. Координаталык түз сызыкта төмөнкү көптүктөрдүн бириктүүсүн сүрөттөгүлө:

а) $A = \{x | x \in Z, x > -4\}, B = \{x | x \in Z, x \leq 3\}$;

б) $A = \{x | x \in N, x > 2\}, B = \{x | x \in Z, x \leq 7\}$;

в) $A = \{x | x \in R, x \geq -3\}, B = \{x | x \in R, x \leq 8\}$;

г) $A = \{x | x \in R, -1 \leq x < 5\}, B = \{x | x \in R, 1 < x \leq 6\}$;

д) $A = \{x | x \in R, -3\frac{3}{4} < x \leq 4\frac{1}{3}\}, B = \{x | x \in R, -2\frac{5}{6} \leq x < 7\frac{3}{5}\}$.

29. «Математика» жана «геометрия» сөздөрүнүн тамгаларынын көптүктөрүнүн бириктүүсүн тапкыла.

30. A – бир орундуу сандардын көптүгү, B – эки орундуу жуп натуралдык сандардын көптүгү. $A \cup B$ көптүгүнө кайсы сандар кирет? Мында - 5 жана 7 сандары барбы?

31. Координаталык түз сызыкты пайдаланып төмөнкү барабарсыздыктардын чечимдеринин көптүгүн тапкыла:

а) $x > -3$ жана $x > 1$; в) $x - 3 > 5$ жана $x + 4 > 9$;

б) $x \geq -2$; жана $x \leq 4$ г) $2x - 1 > 7$ жана $x - 3 \leq 5$.

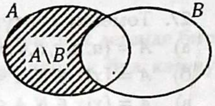
1.6. КӨПТҮКТӨРДҮН АЙЫРМАСЫ. ТОЛУКТООЧ КӨПТҮК

Эгерде эки көптүк берилген болсо, анда алардын кесилишин, биригүүсүн, ошондой эле айырмасын табууга болот.

9-аныктама. A көптүгүнүн B көптүгүнө кирбеген элементтеринен гана түзүлгөн көптүк A жана B ***көптүктөрүнүн айырмасы*** деп аталат.

А жана В көптүктөрүнүн айырмасын $A \backslash B$ сиволу менен белгилешет.

1-мисал. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ жана $B = \{a, d, e\}$ көптүктөрүнүн айырмасын тапкыла. Анда $A \backslash B = \{b, c, f\}$ көптүгүнө ээ болобуз.



8-сүрөт

А жана В көптүктөрүнүн айырмасы

$$A \backslash B = \{x | x \in A \land x \notin B\} \tag{5}$$

көрүнүшүндө жазылат.

Айырманын аныктамасына ылайык, $x \in A$ жана $x \notin B$ болгон учурда гана $x \in A \backslash B$ болот. Ошондой эле, $x \notin A$ жана $x \in B$ болгон учурда гана $x \notin A \backslash B$ болот. Эки көптүктүн айырмасын табуу амалы *кемитүү* деп аталат.

8-сүрөттө эки көптүктүн айырмасы Эйлердин тегерекчелеринин жардамында сүрөттөлдү.

10-аныктама. Эгерде $A \subset U$ болсо, анда $U \backslash A$ айырмасы A көптүгүн U универсалдык көптүгүнө чейин ***толуктооч*** көптүк деп аталат.

А камтылуучу көптүгүнүн U универсалдык көптүгүнө чейин толуктооч көптүгүн $\bar{A}$ деп белгилешет. Айырманын аныктамасын

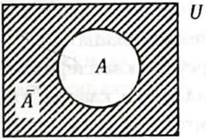
$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} U \backslash A \qquad (6)$$

көрүнүшүндө да жазууга болот.

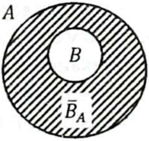
Толуктооч көптүктүн графикалык сүрөттөлүшүн көрсөтөлү (9-сүрөт).

Аныктамадан $x \notin A$ болгон учурда гана $x \in \bar{A}$ жана $x \notin \bar{A}$ болгон учурда гана $x \in A$ боло тургандыгы келип чыгат.

Эгерде $B \subset A$ болсо, анда $A \backslash B$ айырмасы B көптүгүн A көптүгүнө чейин ***толуктооч*** көптүк деп аталат. Толуктооч көптүк $\bar{B}_A$ символу менен белгиленет (10-сүрөт).



9-сүрөт



10-сүрөт

КӨНҮГҮҮЛӨР

32. Эгерде $A = \{3, 4, 5, 6\}$ жана $B = \{4, 9, 10\}$ болсо, анда төмөнкү сүйлөмдөр туура боло турган шарттарды көрсөткүлө:

а) $6 \in A \setminus B$; б) $3 \notin B \setminus A$.

33. Эгерде A жана B көптүктөрү белгилүү болсо, анда алардын айырмасын тапкыла:

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{1, 3, 5, 8\}$;

б) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$;

в) $A = \{6, 7, 8\}, B = \emptyset$;

г) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{3, 4, 6, 9, 12\}$;

34. A – 3кө эселүү натуралдык сандардын көптүгү, B – 9га эселүү натуралдык сандардын көптүгү болсун. Анда:

а) $\bar{B}_A$ көптүгүнүн элементтеринин мүнөздүк касиетин атагыла;

б) $132 \in \bar{B}_A$, $108 \notin \bar{B}_A$, экендиктери туурабы?

1.7. КӨПТҮКТӨРДҮ КЛАССТАРГА АЖЫРАТУУ. КЛАССИФИКАЦИЯЛОО

Курчап турган дүйнөнүн предметтерин жана кубулуштарын үйрөнүү процессинде биз ар дайым классификациялоого (бөлүктөөгө) туш болобуз. Классификациялоо биологияда, математикада, химияда, тилде ж.б. көптөгөн илимдерде кеңири пайдаланылат. Орто мектептин окуу материалдарынын курстарында ар түрдүү классификациялар орун алган. Маселен, жалбырактардын түзүлүшү, сөз түркүмдөрү, сүйлөм мүчөлөрү, сандар, геометриялык фигуралар ж.б.у.с. боюнча классификациялашат.

Математиканын башталгыч курсунан классификациялоого мисалдар келтирели. Натуралдык сандар эки класска ажырайт: жуп жана так; тегиздиктин бурчтары төрт класска ажырайт: жайылган, тик, тар жана кең.

Адамзаттын ар кандай ишмердиги көптүктөрдү камтылуучу көптүктөргө ажыратуу менен байланышкан. Алынган камтылуучу көптүктөр кандайдыр бир касиеттерге ээ болууга тийиш:

- бош көптүк болбошу керек;
- жалпы элементтери болбошу керек;
- бардык камтылуучу көптүктөрдүн биригүүсү көптүктүн өзүн бериши керек.

11-аныктама. Берилген көптүктү эки-экиден кесилишпөөчү бош эмес камтылуучу көптүктөрдүн биригүүсү көрүнүшүндө көрсөтүү ***көптүктөрдү классификациялоо*** же ***көптүктөрдү класстарга ажыратуу (бөлүктөө)*** деп аталат.

Мына ошентип, X көптүгүн $X_1, X_2, \ldots, X_n$ класстарга ажыратуу төмөнкүдөй шарт боюнча аныкталат:

1. $X_i \neq \emptyset \ (i = 1, 2, \ldots, n)$;
2. $X_i \cap X_j = \emptyset \ (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$;
3. $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = X$.

Эгерде ушул шарттардын бирөө гана аткарылбай калса, анда каралган түшүнүк туура классификацияланбайт. Мисалы, эгерде үч бурчтуктардын көптүгүнөн тең капталдуу, тең жактуу жана ар түрдүү жактуу камтылуучу көптүктөрдү бөлүп алсак, анда көптүк туура эмес бөлүктөлөт. Анткени тең капталдуу жана тең жактуу үч бурчтуктардын камтылуучу көптүктөрү кесилишет (бардык тең жактуу үч бурчтуктар тең капталдуу да болушат). Бул учурда көптүктөрдү класстарга ажыратуунун 2-шарты аткарылган жок.

Бир, эки жана үч касиеттин жардамында көптүктөрдү классификациялоого мисалдар карайлы.

Маселен, натуралдык сандардын көптүгүн карайлы. Анын элементтери ар түрдүү касиеттерге ээ. Бизди кызыктырганы «4кө бөлүнөт» деген касиет болсун. Бул касиет натуралдык сандардын көптүгүнөн 4кө бөлүнүүчү сандардан турган камтылуучу көптүктү бөлүп алууга мүмкүндүк түзөт. Анда дагы бир камтылуучу көптүк – 4кө бөлүнбөөчү сандардан турган камтылуучу көптүк пайда болот (11-сүрөт).

11-сүрөт

Бөлүнүп көрсөтүлгөн камтылуучу көптүктөр кесилишпегендиктен, ал эми алардын бириккүүсү натуралдык сандардын көптүгүнө дал келгендиктен, бул көптүк эки класска ажырады.

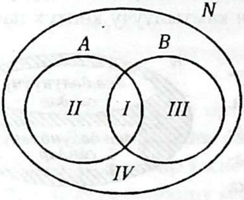
Жалпы алганда, эгерде X көптүгүндө бир касиет берилген болсо, анда ал бул көптүктү эки класска бөлөт. Биринчиси – бул касиетке ээ болгон объектилердин классы, ал эми экинчиси – бул биринчи класстын X көптүгүнө чейинки толуктооч көптүгү. Экинчи класста берилген касиетке ээ болбогон X көптүгүнүн объектилери болот. Мындай классификация *дихотомиялык* деп аталат. Эми көптүктө эки касиет берилсин дейли. Натуралдык сандардын көптүгүндө «3кө эселүү болуу» жана «4кө эселүү болуу» деген касиеттерди карайлы.

Бул касиеттердин жардамында N натуралдык сандарынын көптүгүнөн эки камтылуучу көптүктү бөлүп алууга болот:

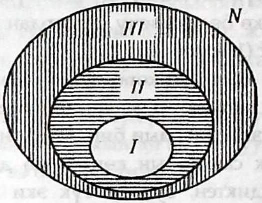
A – 3кө эселүү болгон натуралдык сандардын көптүгү, B – 4кө эселүү болгон натуралдык сандардын көптүгү. Бул көптүктөр кесилишет. Бирок алардын бири да экинчисинин камтылуучу көптүгү болбойт (12-сүрөт). Алынган сүрөттү талдайлы. N натуралдык сандарынын көптүгү төрт областка бөлүндү. Алар номерлер менен көрсөтүлдү.

Алардын ар бири N көптүгүнүн камтылуучу көптүгү болот. I камтылуучу көптүк 3кө жана 4кө эселүү болгон сандардан турат. II камтылуучу көптүк 3кө эселүү болгон жана 4кө эселүү болбогон сандардан турат. III камтылуучу көптүк 4кө эселүү болгон жана 3кө эселүү болбогон сандардан турат. IV камтылуучу көптүк 3кө да, 4кө да эселүү болбогон сандардан турат. Бул төрт көптүктүн биригүүсү N көптүгүнө барабар болот.

Мына ошентип, эки касиеттин жардамында N натуралдык сандарынын көптүгүн төрт класска ажыраттык.



12-сүрөт



13-сүрөт

Көптүктүн элементтеринин эки касиети ар дайым эле көптүктү төрт класска ажырата бербейт. Маселен, «2ге эселүү болуу» жана «4кө эселүү болуу» деген касиеттердин жардамында натуралдык сандардын көптүгү үч класска ажырайт (13-сүрөт): I 4кө эселүү болгон сандардын классы, II 2ге эселүү болгон, бирок 4кө эселүү болбогон сандардын классы, III 2ге да, 3кө да эселүү болбогон сандардын классы.

КӨНҮГҮҮЛӨР

35. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ көптүгүнөн төмөнкү камтылуучу көптүктөрдү бөлүп алалы:

а) A – жуп сандардын көптүгү, B – так сандардын көптүгү;

б) A – 2ге эселүү сандар, B – 3кө эселүү сандар, C – 4кө эселүү сандар;

в) A – так бир орундуу сандар, B – жуп эки орундуу сандар.

Кайсы учурда X көптүгү класстарга ажырайт?

36. Үч бурчтуктардын көптүгүнөн төмөнкү үч бурчтуктардын көптүгүн бөлүп алалы:

а) тик бурчтуу үч бурчтуктар, тең капталдуу үч бучтуктар, тең жактуу үч бурчтуктар;

б) тар бурчтуу үч бурчтуктар, кең бурчтуу үч бурчтуктар, тик бурчтуу үч бурчтуктар;

в) тең жактуу үч бурчтуктар, тик бурчтуу үч бурчтуктар, кең бурчтуу үч бурчтуктар.

Кайсы учурда үч бурчтуктардын көптүгү класстарга ажырайт?

37. Натуралдык сандардын көптүгүндө «7ге эселүү болуу» деген касиет берилсин. Бул касиет N көптүгүн канча класска бөлөт? Ар бир класстан экиден элемент атагыла.

38. N натуралдык сандардын көптүгүн жана анын камтылуучу көптүктөрүн: жуп сандардын көптүгүн жана 7ге эселүү болгон сандардын көптүгүн Эйлердин тегеректелеринин жардамында сүрөттөгүлө. N көптүгү бөлүктөргө ажыратылды деп айтууга болобу?

а) эки класска: жуп сандардын жана 7ге эселүү болгон сандардын көптүгү;

б) төрт класска: 7ге эселүү болгон жуп сандардын көптүгү; 7ге эселүү болбогон жуп сандардын көптүгү; 7ге эселүү болгон так сандардын көптүгү; 7ге эселүү болбогон так сандардын көптүгү?

1.8. КОРТЕЖДЕР. КӨПТҮКТӨРДҮН ДЕКАРТТЫК КӨБӨЙТҮНДҮСҮ

Кортеждер. Күндөлүк турмушта «түгөй» сөзүн көп пайдаланабыз: бут кийимдердин «түгөйү», жылкылардын «түгөйү», бийчилердин «түгөйү» ж.б.у.с. Эгерде түгөйдүн элементтеринин иретти мааниге ээ болсо, анда ал түгөйдү *иреттелген* деп айтабыз. Мисалы, 36 саны 3 жана 6 цифраларынан турат. Эгерде бул сандын цифраларынын ордун алмаштырсак, анда башка 63 санын алабыз. Биринчи учурда $\langle 3; 6\rangle$ түгөйүнө, кийинки учурда $\langle 6; 3\rangle$ түгөйүнө ээ болдук.

12-аныктама. Кандайдыр бир тартипте жайланышкан эки элемент иреттелген ***түгөй*** деп аталат жана ал $\langle a, b\rangle$ деп белгиленет.

Мында, a, b элементтери – түгөйдүн *компоненттери* деп аталат. Түгөйдүн элементтери барабар болушу да мүмкүн.

13-аныктама. Эгерде $\langle a, b\rangle$ жана $\langle c, d\rangle$ түгөйлөрүнүн тийешелүү компоненттери барабар, б.а. $a = c$ жана $b = d$ болсо, анда бул түгөйлөр ***барабар түгөйлөр*** деп аталат.

Эгерде X көптүгү берилген болсо, анда анын элементтеринен иреттелген түгөйлөрдү гана түзбөстөн, иреттелген үчтүктөрдү, төрттүктөрдү ж.б. ды да түзүүгө болот. Мисалы, «математика» сөзүндөгү тамгалар иреттелген ондукту түзөт. Жекече учурлары иреттелген түгөй, иреттелген үчтүк, иреттелген төрттүк ж.б. лар болгон түшүнүктөрүнүн жалпы математикалык түшүнүгүн киргизели.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ көптүктөрү берилсин. X_1 көптүгүнөн кандайдыр бир a_1 элементин, X_2 көптүгүнөн a_2 элементин ж.б. X_n көптүгүнөн a_n элементин алалы. Тандалып алынган элементтерди ирети менен жайгаштыралы: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Натыйжада $X_1, X_2, \dots, X_n$ көптүктөрүнүн элементтеринен түзүлгөн иреттелген *n дикке* ээ болдук. «Иреттелген n дик» сөзүн кыскача ***«кортеж»*** («кортеж» француз сөзү, салтанаттуу жүрүш дегенди билдирет) деп айтышат. n саны *кортеждин узундугу,* $a_1, a_2, \dots, a_n$ элементтери – анын компоненттери деп аталат. Көпчүлүк учурларда кортеж $\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$ көрүнүшүндө жазылат.

14-аныктама. Кандайдыр бир тартипте жайланышкан n элемент иреттелген ***кортеж*** деп аталат жана ал $\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$ деп белгиленет.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ көптүктөрү жалпы элементтерге ээ болушу, ал тургай элементтери бири-бири менен дал келиши да мүмкүн. Мисалы, $X = \{$а, б, в, … , ю, я$\}$ көптүгүнүн элементтеринен түзүлгөн «математика» (бул учурда «математика» сөзүнө берилген көптүктүн бардык эле элементтери кирген эмес, анын бир бөлүгү гана кирген) сөзүндө кортеждин узундугу 10 го барабар.

15-аныктама. Эгерде $\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$ жана $\langle b_1, b_2, \dots, b_m\rangle$ кортеждери бирдей узундукка ээ, б.а. $n = m$ жана тийешелүү компоненттери барабар, б.а. $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_m$ болсо, анда алар ***барабар кортеждер*** деп аталат.

Көптүктөрдүн декарттык[2] көбөйтүндүсү. Кортеждер түшүнүгүн пайдалануу менен эки, үч, төрт ж.б. n көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсү түшүнүктөрүн аныктоого болот.

16-аныктама. Эгерде эки түгөйдүн тийешелүү компоненттери, б.а. $a_1 = b_1$ жана $a_2 = b_2$ барабар болсо гана, анда $\langle a_1, a_2\rangle$ жана $\langle b_1, b_2\rangle$ түгөйлөрү ***барабар түгөйлөр*** деп аталат.

17-аныктама. Биринчи компоненти X, ал эми экинчи компоненти Y көптүгүнө таандык, б.а., $x \in X$, $y \in Y$ болгон бардык түгөйлөрдүн көптүгү X жана Y көптүктөрүнүн ***декарттык көбөйтүндүсү*** деп аталат.

Көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсү $X \times Y$ символу менен белгиленет, мында $\times$ символу көбөйтүү белгиси.

Эки көптүктүн декарттык көбөйтүндүсү аныктаманын негизинде төмөндөгүдөй жазылат:

$$X \times Y \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle | x \in X \text{ жана } y \in Y\}. \tag{7}$$

1-мисал. $X = \{1, 2, 4\}$ жана $Y = \{a, b\}$ көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу. $X \times Y = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 4, a\rangle, \langle 4, b\rangle\}$.

$X \times X = X^2$ көптүгү X жана X көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсү болот жана декарттык квадрат деп аталат.

Көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсү коммутативдик да, ассоциативдик да касиетке ээ болбойт.

Ар кандай X көптүгү үчүн $X \times \emptyset = \emptyset \times X = \emptyset$ барабардыгы туура.

Эгерде A жана B көптүктөрү чектүү жана элементтери анча көп эмес болсо, анда бул көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсүн графтардын же таблицалардын да жардамында сүрөттөөгө болот.

---

[2] Рене Декарт (1596—1650) – француздук философ, математик, физик, физиолог.

2-мисал. $A = \{1, 2, 3\}$ жана $B = \{x, y\}$ көптүктөрү берилген. Бул көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсүн тапкыла:

Чыгаруу.

$A \times B = \{\langle 1, x\rangle, \langle 1, y\rangle, \langle 2, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 3, x\rangle, \langle 3, y\rangle\}$.

Эми бул көбөйтүндүнүн таблицалык моделин көрсөтөлү.

A \ B	x	y
1	$\langle 1, x\rangle$	$\langle 1, y\rangle$
2	$\langle 2, x\rangle$	$\langle 2, y\rangle$
3	$\langle 3, x\rangle$	$\langle 3, y\rangle$

n сандагы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ көптүктөрү (алар жалпы элементтерге ээ болушу да мүмкүн) берилсин. Бул көптүктөрдүн элементтеринен биринчи компоненти A_1, экинчи компоненти A_2 ж. б., n – компоненти A_n көптүгүнө таандык болгон n узундуктагы кортеждерди түзөлү.

18-аныктама. Биринчи компоненти A_1, экинчи компоненти A_2, ж.б. n-компоненти A_n көптүгүнө таандык болгон n узундуктагы бардык мүмкүн болгон кортеждер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ көптүктөрүнүн ***декарттык көбөйтүндүсү*** деп аталат.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсү $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ деп белгиленет. Аныктаманын негизинде декарттык көбөйтүндүнү

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\} \quad (8)$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

3-мисал. $A_1 = \{3, 4\}$, $A_2 = \{x, y\}$ жана $A_3 = \{a, b, c\}$ көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу.

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{\langle 3, x, a\rangle, \langle 3, x, b\rangle, \langle 3, x, c\rangle, \langle 3, y, a\rangle, \langle 3, y, b\rangle, \langle 3, y, c\rangle,$ $\langle 4, x, a\rangle, \langle 4, x, b\rangle, \langle 4, x, c\rangle, \langle 4, y, a\rangle, \langle 4, y, b\rangle, \langle 4, y, c\rangle\}$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

39. Эгерде:

а) $A = \{a, b, c, d, e\}$ жана $B = \{x, y, z\}$;

б) $A = B = \{a, b, c, d\}$;

в) $A = \{1, 2, 3\}$ жана $B = \varnothing$ болсо, анда $A \times B$ декарттык көбөйтүндүсүн тапкыла.

40. 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынан турган бардык эки орундуу сандарды жазгыла. Алардын ичинен 4 цифрасы менен башталган сандарды тапкыла.

41. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ жана $B = \{2, 3\}$ көптүктөрү берилген. $A \times B$ жана $B \times A$ декарттык көбөйтүндүлөрүн тапкыла.

42. «Барабар» сөзүндө канча тамга бар? Бул сөздө канча ар түрдүү тамга бар? Көптүктөр жана кортеж түшүнүгүн пайдаланып маселе түзгүлө.

2-ГЛАВА

КОМБИНАТОРИКАНЫН НЕГИЗГИ ЗАКОНДОРУ

2.1. КОМБИНАТОРИКАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Практикада кандайдыр бир көптүктүн элементтеринен түзүлгөн камтылуучу көптүктөрдү тандап алууга, кандайдыр бир көптүктүн элементтерин тигил же бул тартипте жайгаштырууга ж. б. у.с. иштерди аткарууга туура келет. Мисалы, мастер жумушчуларына ар түрдүү иштердин түрлөрүн оптималдуу бөлүштүрүүнүн, башталгыч мектептин окуу бөлүмүнүн башчысы сабактардын жадыбалын түзүүнүн бардык оптималдуу варианттарынын, шахматист бир нече жүрүштөрдүн серияларынын ичинен эң мыктысын тандап алуунун мүмкүнчүлүктөрүн караган учурлар турмушта көп эле кездешет.

Чектүү көптүктөрдүн кандайдыр бир шарттарды канааттандырган камтылуучу көптүктөрүнүн жана иреттелген көптүктөрдүн санын аныктоого берилген маселелер *комбинаторикалык маселелер* деп аталат.

Комбинаторика – берилген эрежелерге ылайык кандайдыр бир чектүү көптүктүн элементтерин тандоо, жайгаштыруу жана аларды эсептөө маселесин чечүүгө арналган математиканын бөлүмү.

«Комбинаторика» сөзү латындын «combinare» сөзүнөн алынган жана «бириктирүү», «айкалыштыруу» дегенди билдирет.

Кандайдыр бир объектилерден түзүлгөн топ *комбинация,* ал эми аны түзгөн предметтер элементтери деп аталат.

Комбинаторикалык маселелер ***көптүктөрдүн үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар*** менен тыгыз байланышкан.

1. ***Чектүү көптүктү ирөттөө.*** Бул амал m элементтен турган көптүктү орун алмаштыруу түшүнүгүнө жана m элементтен

турган бардык мүмкүн болгон орун алмаштыруулардын санын аныктоо маселесине алып келет.

2. ***Кандайдыр бир чектүү көптүктүн иреттелген көптүктөрүн тандоо.*** Бул орундаштыруу түшүнүгүнө жана m элементтүү көптүктүн бардык k элементтүү иреттелген көптүктөрүнүн санын аныктоо маселесине алып келет.

3. ***Кандайдыр бир чектүү көптүктүн камтылуучу көптүктөрүн тандоо.*** Бул топтоштуруу түшүнүгүнө жана m элементтүү көптүктүн бардык k элементтүү камтылуучу көптүктөрүнүн санын аныктоо маселесине алып келет.

Иш жүзүндө комбинаторика чектүү көптүктөрдү жана алардын камтылуучу көптүктөрүн, ошондой эле чектүү көптүктөрдүн элементтеринен түзүлгөн көптүктөрдү үйрөтөт.

Комбинаторика математиканын бөлүмү катары XVI кылымда пайда болгон. Комбинаторикалык маселелерди чыгаруу менен алгачкылардан болуп италиялык математик Н. Тарталья (1500–1557) алектенген. Андан ары комбинаториканы Б. Паскаль (1623–1662) жана П. Ферма өнүктүргөн. Кийинчерээк комбинаториканын өнүгүшүнө Г. Лейбниц (1646–1716), Я. Бернулли (1654–1705) жана Л. Эйлер (1707–1783) ири салымдарын кошушкан.

Кибернетиканын жана дискреттик математиканын өнүгүшүнө байланыштуу XX кылымдын 50-жылдарынан кийин комбинаторикага кызыгуу күч алган. ЭЭМди пайдалануунун мүмкүнчүлүгү комбинаторикалык маселелерге болгон кызыгууну активдештирди.

Математиканын башталгыч курсунда комбинаторикалык маселелер окуучулардын акыл-эс иш-аракеттеринин өнүгүүсүнө чоң мүмкүнчүлүктөр түзгөндүктөн, алардын ролу уламдан-улам өсүүдө.

Башталгыч мектептин аракеттеги математика боюнча окуулуктарында да тандоо ыкмасы менен чыгарылуучу комбинаторикалык маселелер арбын. Алар математиканын башталгыч курсунда стандарттык эмес маселелер деп аталат. Бул маселелерди чыгарууну жеңилдетүү үчүн таблицалар жана графтар пайдаланылат. Мына ошондуктан башталгыч мектептин мугалими комбинаториканын негиздерин жана жөнөкөй комбинаторикалык маселелерди чыгаруунун методдорун жана илелерин билүүгө тийиш. Ошону менен катар, мугалим маселелердин чыгарылышын сабаттуу текшерүү үчүн бардык мүмкүн болгон комбинациялардын санын билиши керек. Болочок мугалим комбинаториканын жалпы эрежелерин (өзгөчө, сумма жана көбөйтүндү эрежелерин), комбинциялардын кээ бир түрлөрүн жана алардын сандарын формулалардын жардамында эсептөөнү билүүгө тийиш.

2.2. СУММА ЭРЕЖЕСИ

Комбинаторика көптүктөр теориясынын камтылуучу көптүк, көптүктөрдүн биригүүсү, көптүктөрдүн кесилиши сыяктуу түшүнүктөрү менен тыгыз байланышкан. Ошондуктан комбинаторикалык маселелерди чыгаруу учурунда алардын пайдасы бир кыйла тийет.

Көпчүлүк комбинаторикалык маселелерди чыгаруу сумма жана көбөйтүндү эрежелерине негизделген. Сумма эрежеси чектүү көптүктөрдүн биригүүсүндөгү элементтердин санын табууга мүмкүндүк берет.

1-теорема. Эгерде A көптүгү m элементтен, B көптүгү k элементтен турса жана бул көптүктөр кесилишпесе, анда $A \cup B$ көптүгүнүн элементтеринин саны $m + k$ санына барабар болот.

Далилдөө. Өз ара кесилишпеген $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ жана $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ көптүктөрү берилсин. A көптүгүндөгү элементтердин санын $n(A) = m$, B көптүгүндөгү элементтердин санын $n(B) = k$, ал эми $A \cup B$ көптүгүндөгү элементтердин санын $n(A \cup B) = c$ деп белгилейли. A көптүгүнө же B көптүгүнө тийешелүү болгон элементти канча түрдүү жол менен тандап алууга боло тургандыгын көрсөтөлү. Чындыгында, $n(A) + n(B)$ саны A көптүгүндөгү бардык элементтердин, андан кийин B көптүгүндөгү бардык элементтердин санын эсептеп чыккандан кийин алынган сан. Бул учурда $A \cap B = \emptyset$ болгондуктан, жалпы элементтердин саны $n(A \cap B) = 0$ болот. Ошондуктан

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = m + k = c \qquad (1)$$

экендиги келип чыгат. Теорема далилденди.

Эгерде A жана B көптүктөрү кесилишпесе, б.а. $A \cap B = \emptyset$ болсо, анда бул көптүктөрдүн биригүүсүндөгү элементтердин саны

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = m + k$$

формуласы менен эсептеле тургандыгы көптүктөр теориясында кеңири каралган.

(1) барабардык *сумма эрежеси* деп аталат.

1-сумма эрежеси. Эгерде a элементин m түрдүү жол менен, ал эми b элементин k түрдүү жол менен тандап алууга мүмкүн болсо, анда же a же b элементин $m + k$ түрдүү жол менен тандап алууга болот.

Сумма эрежесин эки-экиден кесилишпеген экиден ашык көптүктөр үчүн да жайылтууга болот.

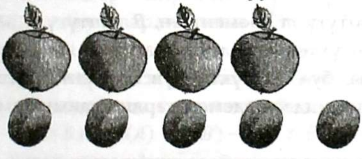
Эгерде $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m = \emptyset$ болсо, анда

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \ ... + n(A_m) \qquad (2)$$

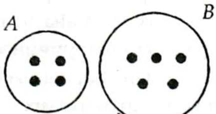
болот.

Сумма эрежесин пайдаланып маселелер чыгаралы.

1-маселе. Табакта 4 алма жана 5 өрүк бар. Бир мөмөнү канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?



14-сүрөт



15-сүрөт

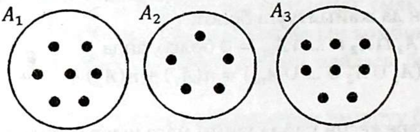
Чыгаруу. Маселенин шарты боюнча $n(A) = 4$ – алмалардын саны, $n(B) = 5$ – өрүктөрдүн саны. Демек, табактагы 4 ар түрдүү алманын ичинен бирөөнү тандап алуунун 4 жолу, ал эми 5 өрүктүн ичинен бирөөнү тандап алуунун 5 ар түрдүү жолу бар. Ошентип, сумма эрежесине ылайык «же алманы же өрүктү» тандап алуунун

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 + 5 = 9$ түрдүү жолу бар (14-15-сүрөттөр).

Жообу: 9.

2-маселе. Вазада 7 роза гүлү, 5 кызгалдак гүлү жана 8 гвоздика гүлү бар. Бир гүлдү канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

Чыгаруу. Маселенин шарты боюнча $n(A_1) = 7$ – роза гүлүнүн саны, $n(A_2) = 5$ – кызгалдак гүлүнүн саны, $n(A_3) = 8$ – гвоздика гүлүнүн саны. Демек, вазадагы роза гүлүн 7 түрдүү жол менен, кызгалдакты 5 түрдүү жол менен, ал эми гводиканы 8 түрдүү жол менен тандап алууга болот. Маселеде же роза же кызгалдак же гвоздика гүлдөрүнүн бирин тандап алуу жөнүндө сөз болуп жаткандыктан, бул гүлдөрдүн сандарын кошуу зарыл. Сумма эрежеси боюнча бир гүлдү $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 7 + 5 + +8 = 20$ түрдүү жол менен тандап алууга болот (16-сүрөт).



16-сүрөт

Эми $A \cap B \neq \emptyset$ болсун.

2-теорема. Эгерде A көптүгү m элементтен, B көптүгү k элементтен турса жана бул көптүктөр кесилишсе, анда $A \cup B$ көптүгүнүн элементтеринин саны, бул көптүктөрдүн элементтеринин суммасынан алардын кесилишиндеги элементтердин санын кемитип койгонго барабар.

Далилдөө. Бул учурда көптүктөрдүн биригүүсүндөгү элементтердин санын табуу жөнүндөгү маселе бир кыйла татаал. A жана B көптүктөрү кесилишкендиктен $n(A) + n(B)$ суммасына $A \cap B$ кесилишиндеги элементтердин саны ($n(A \cap B)$) эки жолу кирет: биринчисинде $n(A)$ аркылуу, экинчисинде $n(B)$ аркылуу, б.а.

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B).$$

Ошондуктан $n(A \cup B)$ санын табуу үчүн, $n(A) + n(B)$ суммасынан

$n(A \cap B)$ санын кемитип коюу керек. Буларды эске алып төмөнкү формуланы жазууга болот:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (3)$$

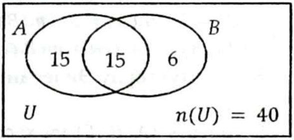
Теореманын тууралыгы далилденди.

2-сумма эрежеси. Эки көптүктүн биригүүсүндөгү элементтердин саны бул көптүктөрдүн элементтеринин суммасынан алардын кесилишиндеги элементтердин санын кемитип койгонго барабар.

3-маселе. Класста 40 окуучу бар. Алардын 32си математика ийримине, 21и «Чебер колдор» ийримине, 15и эки ийримге тең катышат. Канча окуучу бир да ийримге катышпайт?

Чыгаруу. Маселени көптүктөр теориясынын тилине которолу. Маселеде универсалдык көптүк жана анын эки камтылуучу көптүктөрү жөнүндө сөз болуп жатат: U – класcстын окуучуларынын көптүгү, A – математика ийримине катышкан окуучулардын көптүгү, B – «Чебер колдор» ийримине катышкан окуучулардын көптүгү. Маселенин шарты боюнча бул көптүктөр кесилишет.

$n(U) = 40$ – класстагы окуучулардын саны, $n(A) = 30$ – математика ийримине катышкан окуучулардын саны, $n(B) = 21$ – «Чебер колдор» ийримине катышкан окуучулардын саны (17-сүрөт).



17-сүрөт

Сумма эрежеси боюнча A жана B көптүктөрүнүн биригүүсүндөгү элементтердин санын табабыз:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 21 - 15 = 36.$

Эми бир да ийримге катышпаган окуучулардын санын табалы:

$n(U) - n(A \cup B) = 40 - 36 = 4.$

Демек, 4 – бир да ийримге катышпаган окуучулардын саны.

Жообу: 4 окуучу.

Эми үч көптүктүн биригүүсүндөгү элементтердин санын табуунун формуласын келтирип чыгаралы.

$n(A \cup B \cup C) = n[A \cup (B \cup C)] = n(A) + n(B \cup C) -$

$-n[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) -$
$-\{n(A \cap C) + n(A \cap B) - n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]\} =$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) +$
$+n(A \cap B \cap C).$

Натыйжада төмөнкү формулага ээ болобуз.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \quad (4)$$

4-маселе. 3-4-класста 70 окуучу бар. Алардын ичинен 36сы математика ийримине, 28и музыка ийримине, 20сы сүрөт ийримине, 10 окуучу математика жаңа сүрөт, 12 окуучу музыка жана сүрөт, 14 окуучу математика жана музыка ийримдерине катышат. 17 окуучу бир да ийримге катышпайт. Канча окуучу бир гана ийримге катышат?

Чыгаруу. U – 3-4-класстын окуучуларынын көптүгү,

A – математика ийримине катышкан окуучулардын көптүгү,

B – музыка ийримине катышкан окуучулардын көптүгү,

C – сүрөт ийримине катышкан окуучулардын көптүгү болсун.

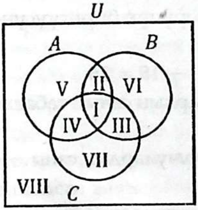
Маселенин шартында көрсөтүлгөн берилиштерди жазалы:

$m(U) = 70; m(A) = 36; m(B) = 28; m(C) = 20;$

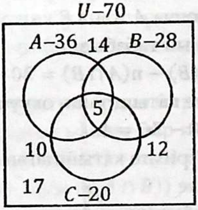
$m(A \cap B) = 14$, (I+II); $m(B \cap C) = 12$, (I+III); $m(A \cap C) = 10$, (I+IV).

Бул көптүктөрдү Эйлердин тегеректелеринин жардамында сүрөттөйлү.

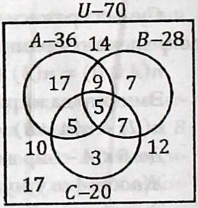
U көптүгү (A, B, C) үч касиеттин жардамында 8 класска ажырады (18-сүрөт).



18-сүрөт



19-сүрөт



20-сүрөт

Ар бир класстын элементтеринин санын аныктоо талап кылынат.

Шарт боюнча бир да ийримге катышпаган окуучулардын саны 17. Демек, VIII класста 17 элемент бар.

$70 - 17 = 53 - A \cup B \cup C$ көптүгүндөгү элементтердин саны.

Үч көптүктүн биригүүсүндөгү элементтердин саны төмөнкү формула менен эсептелери белгилүү:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) -$
$-n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Бул формулага белгилүү берилиштерди коёбуз жана эсептөөлөрдү аткарабыз:

$53 = 36 + 28 + 20 - 14 - 12 - 10 + m(A \cap B \cap C)$;
$53 = 48 + m(A \cap B \cap C)$.
$m(A \cap B \cap C) = 53 - 48 = 5$ – бул I класстагы элементтердин саны (19-сүрөт).

Андан ары калган ар бир класстын элементтерин удаалаш табабыз жана аларды диаграммада белгилейбиз (20-сүрөт):

$14 - 5 = 9$, (II); $28 - (9 + 7 + 5) = 7$, (VI);
$12 - 5 = 7$, (III); $20 - (7 + 5 + 5) = 3$, (VII);
$10 - 5 = 5$, (IV); $36 - (9 + 5 + 5) = 17$, (V).

Бирден гана ийримге катышкан окуучулардын саны:

$17 + 7 + 3 = 27$, (V+VI+VII).

Жообу: 27 окуучу.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Табакта 6 алма жана 4 алмурут бар. Тигил же бул мөмөнү канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

2. Вазада 5 көк жана 6 кызыл карандаш бар. Бир карандашты канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

3. Дүкөндүн «Оюнчуктар» бөлүмүндө 6 түрдүү куурчак жана 7 түрдүү топ бар. Бөбөк кыз үчүн бир оюнчукту канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

4. Китеп шкафынын биринчи текчесине 21 китеп, экинчи текчесине 32 китеп, ал эми үчүнчү текчесине 48 китеп коюлган. Бир китепти канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

5. Класста 36 окуучу бар. Алардын 24ү математика ийримине, 21и музыка ийримине катышат. 13 окуучу эки ийримге тең катышат. Канча окуучу эки ийримге тең катышпайт? Канча окуучу математика ийримине гана катышат? Канча окуучу музыка ийримине гана катышат?

6. Мектептин 90 окуучусу англис жана немец тилдерин үйрөнүшөт. Алардын 81и англис, 43ү немец тилин үйрөнүшөт. Канча окуучу эки тилди тең үйрөнөт?

7. Класста 32 окуучу бар. Алар музыка жана сүрөт ийримдерине катышат. Музыка ийримине 24 окуучу, ал эми эки ийримге тең 12 окуучу катышат. Канча окуучу сүрөт ийримине гана катышат?

8. 80 студенттин ичинен 42си футбол, 52си волейбол ойнойт. Эки оюндун түрүн 26 студент ойнойт. Канча студент бирден гана оюндун түрүн ойнойт жана канчасы эки оюнга тең катышпайт?

9. 100 окуучу англис жана немец тилдерин үйрөнүшөт. Алардын ичинен 85и англис тилин, 45и немец тилин үйрөнүшөт. Канча окуучу эки тилди тең үйрөнүшөт?

10. 100 студенттин 28и англис тилин, 30у немец тилин, 42и француз тилин, 8и англис жана немец тилдерин, 10у англис жана француз тилдерин, 5и немец жана француз тилдерин үйрөнүшөт. Бардык үч тилди тең 3 студент үйрөнөт. Канча студент бир гана тилди үйрөнөт? Канча студент бир да тилди үйрөнбөйт?

11. 100 студенттин 26сы англис тилин, 28и немец тилин, 40ы француз тилин, 8и англис жана немец тилдерин, 10у англис жана француз тилдерин, 5и немец жана француз тилдерин үйрөнүшөт. Бардык үч тилди тең 4 студент үйрөнөт. Канча студент бир гана тилди үйрөнөт? Канча студент бир да тилди үйрөнбөйт?

2.3. КӨБӨЙТҮНДҮ ЭРЕЖЕСИ

Эми комбинаториканын экинчи эрежеси – көбөйтүндү эрежесин карайлы. Ал берилген чектүү көптүктөрдүн элементтеринен түзүлгөн кортеждердин санын аныктоого мүмкүндүк берет.

3-теорема. Эгерде A көптүгү m элементтен, B көптүгү k элементтен турса, анда $A \times B$ декарттык көбөйтүндүсүндөгү түгөйлөрдүн саны ар бир көптүктүн элементтеринин сандарынын көбөйтүндүсүнө, б.а. $n(A \times B) = m \cdot k$ га барабар.

Далилдөө. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ жана $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ көптүктөрү берилсин. A көптүгүндөгү элементтердин санын $n(A) = m$, ал эми B көптүгүндөгү элементтердин санын $n(B) = k$ деп белгилейли. Бул көптүктөрдүн элементтеринен канча ар түрдүү $\langle a_i, b_j \rangle$ көрүнүшүндөгү түгөйлөрдү түзүүгө боло тургандыгын карайлы. $A \times B$ декарттык көбөйтүндүсүнүн түгөйлөрүнүн санын аныктоо үчүн аларды таблица түрүндө жайгаштыралы:

$$\begin{aligned} A \times B = \{&\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_1, b_2 \rangle, \dots, \langle a_1, b_k \rangle, \\ &\langle a_2, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \dots, \langle a_2, b_k \rangle, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\langle a_m, b_1 \rangle, \langle a_m, b_2 \rangle, \dots, \langle a_m, b_k \rangle\}. \end{aligned}$$

Таблица ар биринде k түгөй болгон m жолчодон турат. Демек, түгөйлөрдүн саны $m \cdot k$ га барабар. Мындан

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = m \cdot k \tag{5}$$

экендиги келип чыгат.

Комбинаторикада (5) барабардык *көбөйтүндү эрежеси* деп аталат.

Көбөйтүндү эрежеси. Эгерде a элементин m түрдүү жол менен жана ар бир мындай тандоодон кийин b элементин k түрдүү жол менен тандап алууга мүмкүн болсо, анда $\langle a, b \rangle$ иреттелген түгөйүн $m \cdot k$ түрдүү жол менен тандап алууга болот.

Көбөйтүндү эрежесин ар кандай чектүү узундуктагы кортеждер үчүн да жайылтууга болот.

Акыркы барабардык k сандагы көптүктөр үчүн да туура болот:

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_k) =$$
$$= m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k. \quad (6)$$

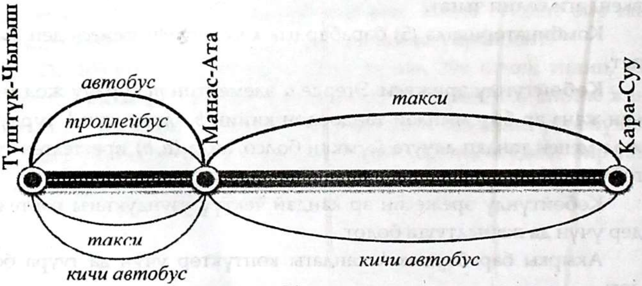
Алынган формулаларды маселелер чыгарууга пайдаланууга болот.

Көбөйтүндү эрежесинин колдонулушуна маселелер чыгаралы.

5-маселе. Ош шаарынын «Түштүк-Чыгыш» кичи районунан «Манас-Ата» кичи районуна автобуста, троллейбуста, таксиде жана кичи автобуста барууга болот. Ал эми «Манас-Ата» кичи районунан Кара-Суу шаарына таксиде жана кичи автобуста барууга болот. Ош шаарынын «Түштүк-Чыгыш» кичи районунан «Манас-Ата» кичи району аркылуу Кара-Суу шаарына канча түрдүү жол менен барууга болот?

Чыгаруу. «Түштүк-Чыгыш» кичи районунан «Манас-Ата» кичи районуна каттоочу унаалардын көптүгүн A менен, ал эми «Манас-Ата» кичи районунан Кара-Суу шаарына каттоочу унаалардын көптүгүн B менен белгилейли. Анда аларды A = {*автобус, троллейбус, такси, кичи автобус*} жана B = {*такси, кичи автобус*} деп көптүктөр теориясынын тилинде жазууга болот. Көптүктөрдүн элементтеринин жайгашуу иретин өзгөртпөстөн, аталыштарын мүмкүн болушунча кыскартып жазалы. Анда $A = \{a, тр., т, k\}$ жана $B = \{т, k\}$ көптүктөрүнө ээ болобуз. Бул көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсүн табалы:

$$A \times B = \{\langle a, т\rangle, \langle a, k\rangle, \langle тр., т\rangle, \langle тр., k\rangle, \langle т, т\rangle, \langle т, k\rangle, \langle k, т\rangle, \langle k, k\rangle\}.$$



21-сүрөт

Бул көрсөтүлгөн унаалар менен «Түштүк-Чыгыш» кичи районунан «Манас-Ата» кичи району аркылуу Кара-Суу шаарына баруунун бардык мүмкүн болгон варианттары (21-сүрөт). Көбөйтүндү эрежеси боюнча бул варианттардын (түгөйлөрдүн) саны $4 \cdot 2 = 8$ болот.

Сүрөттө $\langle a, m \rangle$ же ⟨*автобус, такси*⟩ түгөйлөрү жоон ийри сызыктар менен көрсөтүлдү.

Ушул эле декарттык көбөйтүндүнү таблицанын жардамында да көрсөтүүгө болот.

B / A	*такси*	*кичи автобус*
автобус	*автобус, такси*	*автобус, кичи автобус*
троллейбус	*троллейбус, такси*	*троллейбус, кичи автобус*
такси	*такси, такси*	*такси, кичи автобус*
кичи автобус	*кичи автобус, такси*	*кичи автобус, кичи автобус*

6-маселе. Окуу жайынын ашканасында биринчи тамактын 5 кылы, экинчи тамактын 4 кылы даярдалат. Түштөнүү үчүн биринчи тамактан бирди, экинчи тамактан бирди канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

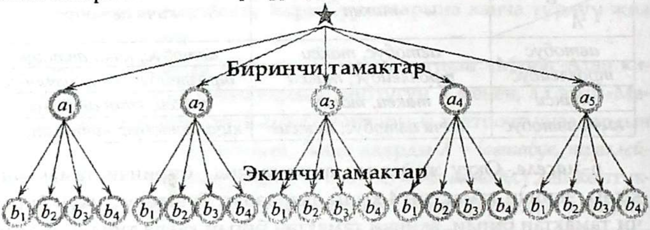
Чыгаруу. Тамактарды тандап алуунун бардык мүмкүн болгон санын гана таппастан, аларды тандап алуунун бардык варианттарын да көрсөтүүгө болот. Биринчи тамактардын көптүгүн $A =$ $= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, экинчи тамактардын көптүгүн $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ деп белгилейли. Мында, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – биринчи тамактар, b_1, b_2, b_3, b_4 – экинчи тамактар. Эми A жана B көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсүн табалы:

$$A \times B = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_1, b_2 \rangle, \langle a_1, b_3 \rangle, \langle a_1, b_4 \rangle, \langle a_2, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_2, b_3 \rangle, \langle a_2, b_4 \rangle, \langle a_3, b_1 \rangle, \langle a_3, b_2 \rangle, \langle a_3, b_3 \rangle, \langle a_3, b_4 \rangle, \langle a_4, b_1 \rangle, \langle a_4, b_2 \rangle, \langle a_4, b_3 \rangle, \langle a_4, b_4 \rangle, \langle a_5, b_1 \rangle, \langle a_5, b_2 \rangle, \langle a_5, b_3 \rangle, \langle a_5, b_4 \rangle\}.$$

Натыйжада 20 түгөй пайда болду. Бул тамактарды тандап алуунун бардык мүмкүн болгон варианттары.

Эми тамактарды тандап алуунун бардык мүмкүн болгон санын табалы. Маселенин шарты боюнча биринчи тамакты $n(A) = 5$ түрдүү, ал эми экинчи тамакты $n(B) = 4$ түрдүү жол менен тандай алабыз. Ошондуктан $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ көбөйтүндү эрежесине ылайык биринчи жана экинчи тамакты $n(A \times B) = 5 \cdot 4 = 20$ түрдүү жол менен тандап алууга болот.

Эми маселенин шартына ылайык тамактарды тандап алуунун бардык мүмкүн болгон учурларын графтын[1] же «варианттардын дарагы» деп аталган схема менен түзөлү (22-сүрөт). Чындыгында, бул граф даракка окшоп кетет, бирок төмөн карай өсөт жана өзөгү болбойт. ★ белгиси дарактын тамырын, ал эми бутактары маселенин чыгарылышынын ар түрдүү варианттарын сүрөттөйт.



22-сүрөт

Ушул эле маселенин чыгарылышын таблицанын жардамында да көрсөтүүгө болот.

$A \setminus B$	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	$\langle a_1, b_1 \rangle$	$\langle a_1, b_2 \rangle$	$\langle a_1, b_3 \rangle$	$\langle a_1, b_4 \rangle$
a_2	$\langle a_2, b_1 \rangle$	$\langle a_2, b_2 \rangle$	$\langle a_2, b_3 \rangle$	$\langle a_2, b_4 \rangle$
a_3	$\langle a_3, b_1 \rangle$	$\langle a_3, b_2 \rangle$	$\langle a_3, b_3 \rangle$	$\langle a_3, b_4 \rangle$
a_4	$\langle a_4, b_1 \rangle$	$\langle a_4, b_2 \rangle$	$\langle a_4, b_3 \rangle$	$\langle a_4, b_4 \rangle$
a_5	$\langle a_5, b_1 \rangle$	$\langle a_5, b_2 \rangle$	$\langle a_5, b_3 \rangle$	$\langle a_5, b_4 \rangle$

Таблицада да 20 түгөй пайда болду.

Жообу: 20 түрдүү жол менен тандап алууга болот.

7-маселе. Табакта 4 алма жана 6 өрүк бар. Алма менен өрүк-

[1]граф – graphō – грек сөзү, жазамын. Кандайдыр бир чокуларды (чекиттерди) туташтырган бир нече жаалардан же кесиндилерден турган тегиздиктеги сүрөттөлүш.

түн бир жубун канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

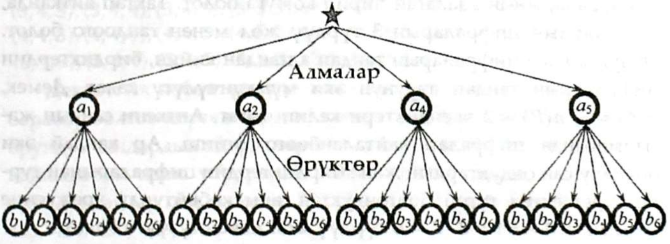
Чыгаруу. Алмалардын көптүгүн $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, өрүктөрдүн көптүгүн $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4b_5,b_6\}$ деп белгилейли. Мында, a_1,a_2,a_3,a_4 – аламалар, b_1,b_2,b_3,b_4b_5,b_6 – өрүктөр. Жемиштерди тандап алуунун бардык мүмкүн болгон варианттарын A жана B көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсүнүн жардамында табалы:
$A\times B=\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_1,b_2\rangle,\langle a_1,b_3\rangle,\langle a_1,b_4\rangle,\langle a_1,b_5\rangle,\langle a_1,b_6\rangle,\langle a_2,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,$
$\langle a_2,b_3\rangle,\langle a_2,b_4\rangle,\langle a_2,b_5\rangle,\langle a_2,b_6\rangle,\langle a_3,b_1\rangle,\langle a_3,b_2\rangle,\langle a_3,b_3\rangle,\langle a_3,b_4\rangle,\langle a_3,b_5\rangle,$
$\langle a_3,b_6\rangle,\langle a_4,b_1\rangle,\langle a_4,b_2\rangle,\langle a_4,b_3\rangle,\langle a_4,b_4\rangle,\langle a_4,b_5\rangle,\langle a_4,b_6\rangle\}.$

Бардык түгөйлөрдүн саны 24. Бул тандап алуунун бардык мүмкүн болгон варианттары.

Маселенин шарты боюнча табактагы алманы 4, ал эми өрүктү 6 түрдүү жол менен тандап алуута болот. Маселеде мөмөлөрдүн түгөйүн (алма жана өрүк) тандап алуу жөнүндө сөз болуп жаткандыктан, аны көбөйтүндү эрежесине ылайык $n(A\times B)=4\cdot 6=24$ түрдүү жол менен тандап алууга болот.

Маселени таблицанын жардамында да чыгарууга болот.

$A \backslash B$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	$\langle a_1,b_1\rangle$	$\langle a_1,b_2\rangle$	$\langle a_1,b_3\rangle$	$\langle a_1,b_4\rangle$	$\langle a_1,b_5\rangle$	$\langle a_1,b_6\rangle$
a_2	$\langle a_2,b_1\rangle$	$\langle a_2,b_2\rangle$	$\langle a_2,b_3\rangle$	$\langle a_2,b_4\rangle$	$\langle a_2,b_5\rangle$	$\langle a_2,6\rangle$
a_3	$\langle a_3,b_1\rangle$	$\langle a_3,b_2\rangle$	$\langle a_3,b_3\rangle$	$\langle a_3,b_4\rangle$	$\langle a_3,b_5\rangle$	$\langle a_3,b_6\rangle$
a_4	$\langle a_4,b_1\rangle$	$\langle a_4,b_2\rangle$	$\langle a_4,b_3\rangle$	$\langle a_4,b_4\rangle$	$\langle a_4,b_5\rangle$	$\langle a_4,b_6\rangle$



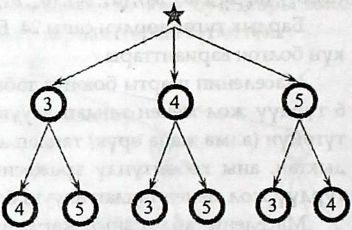
23-сүрөт

Жогоруда маселенин графтын (23-сүрөт) жардамында чыгарылышы көрсөтүлдү.

Жообу: 24 түрдүү жол менен тандап алууга болот.

8-маселе. 3, 4 жана 5 цифраларынын жардамында цифралары кайталанбаган канча эки орундуу сан түзүүгө болот?

Чыгаруу. Бул цифралардын жардамында цифралары кайталанбаган кандай эки орундуу сандарды түзүүгө мүмкүн боло тургандыгын граф моделинин жардамында аныктап алалы (24-сүрөт).



Ондуктары

Бирдиктери

Алынган сандар: 34, 35, 43, 45, 53, 54

24-сүрөт

Эки орундуу сандарды жазуу үчүн ондуктардын цифраларын жана бирдиктердин цифраларын тандоо керек. Маселенин шартына ылайык эки орундуу сандын ондуктарынын ордуна 3, 4 жана 5 цифраларынын каалаган бирин коюуга болот. Тактап айтканда, ондуктардын цифраларын 3 түрдүү жол менен тандоого болот. Ондуктардын цифраларын тандап алгандан кийин, бирдиктердин цифраларын тандап алуунун эки мүмкүнчүлүгү калат. Демек, $n(A) = 3$, $n(B) = 2$ экендиктери келип чыгат. Анткени сандын жазылышында цифралар кайталанбоого тийиш. Ар кандай эки орундуу сан ондуктардын жана бирдиктердин цифраларынан турган иреттелген түгөй болгондуктан, аны көбөйтүндү эрежесине ылайык $n(A \times B) = 3 \cdot 2 = 6$ түрдүү жол менен түзүүгө болот.

Ушул эле маселенин таблицалык моделинен пайда болгон сандарды көрүүгө болот.

Бирдиктери / Ондуктары	3	4	5
3		34	35
4	43		45
5	53	54	

Жообу: 6 түрдүү жол менен түзүүгө болот.

9-маселе. 3, 4 жана 5 цифраларынын жардамында цифралары кайталануучу канча үч орундуу сан түзүүгө болот? Ал сандарды түзгүлө.

Чыгаруу. Бул маселенин шарты боюнча үч орундуу сандардын цифралары кайталанышы мүмкүн. Ошондуктан үч орундуу сандардын жүздүктөрүнүн да, ондуктарынын да, бирдиктеринин да цифраларын 3 түрдүү жол менен тандоого болот. Мында $A = \{3,4,5\}$ болгондуктан, $n(A) = 3$. Үч орундуу сан үч элементтен турган иреттелген кортеж болгондуктан, аны көбөйтүндү эрежесине ылайык A көптүгүнүн элементтеринин санын өзүнө-өзүн үч жолу көбөйтөбүз. Натыйжада $n(A \times A \times A) = n(A) \cdot n(A) \cdot n(A) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ санын алабыз. Демек, 27 түрдүү жол менен цифралары кайталанган үч орундуу сан түзүүгө болот.

Эми ал сандарды түзүүгө киришели, ал үчүн $A = \{3,4,5\}$ көптүгүн өзүнө-өзүн үч жолу көбөйтөлү:

$A \times A \times A = \{3,4,5\} \times \{3,4,5\} \times \{3,4,5\} = \{\langle 3,3,3\rangle, \langle 3,3,4\rangle, \langle 3,3,5\rangle, \langle 3,4,3\rangle, \langle 3,4,4\rangle, \langle 3,4,5\rangle, \langle 3,5,3\rangle, \langle 3,5,4\rangle, \langle 3,5,5\rangle, \langle 4,3,3\rangle, \langle 4,3,4\rangle, \langle 4,3,5\rangle, \langle 4,4,3\rangle, \langle 4,4,4\rangle, \langle 4,4,5\rangle, \langle 4,5,3\rangle, \langle 4,5,4\rangle, \langle 4,5,5\rangle, \langle 5,3,3\rangle, \langle 5,3,4\rangle, \langle 5,3,5\rangle, \langle 5,4,3\rangle, \langle 5,4,4\rangle, \langle 5,4,5\rangle, \langle 5,5,3\rangle, \langle 5,5,4\rangle, \langle 5,5,5\rangle\}$.

Декарттык көбөйтүндүдө алынган үчтүктөрдүн (узундугу 3кө барабар болгон кортеждердин) компоненттери изделип жаткан үч орундуу сандардын цифралары болуп эсептелет. Көбөйтүндүдөгү кашааларды жана үтүрлөрдү эсепке албасак, анда изделүүчү үч орундуу сандар пайда болот: 333, 334, 335, 343, 344, 345, 353, 354, 355, 433, 434, 435, 443, 444, 445, 453, 454, 455, 533, 534, 543, 544, 545, 553, 554, 555.

Маселенин таблица моделин түзөлү:

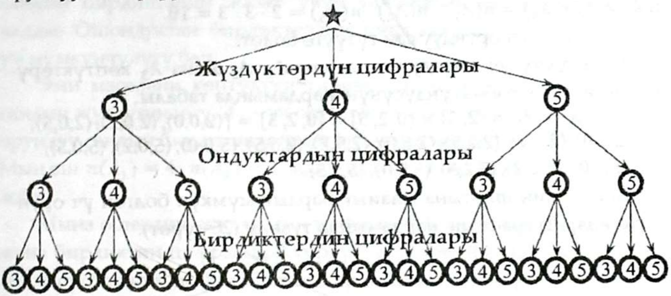
Жүздүктөр	Ондуктар	Бирдиктер	Алынган сандар
3	3	3	**333**
		4	**334**
		5	**335**
	4	3	**343**
		4	**344**
		5	**345**
	5	3	**353**
		4	**354**
		5	**355**
4	3	3	**433**
		4	**434**
		5	**435**
	4	3	**443**
		4	**444**
		5	**445**
	5	3	**453**
		4	**454**
		5	**455**
5	3	3	**533**
		4	**534**
		5	**535**
	4	3	**543**
		4	**544**
		5	**545**
	5	3	**553**
		4	**554**
		5	**555**

Эскертүү: таблицадагы сандарды окуу үчүн жебелердин багытын эсепке алуу керек.

Ошол эле цифралары кайталануучу үч орундуу сандарды түзүүнү граф моделинин жардамында сүрөттөйлү (25-сүрөт).

Жообу: 27 цифралары кайталануучу үч орундуу сан.

10-маселе. 0, 2 жана 5 цифраларынын жардамында канча үч орундуу сан түзүүгө болот? Сандарды түзгүлө.



Алынган сандар: 333, 334, 335, 343, 344, 345, 353, 354, 355, 433, 434, 435, 443, 445, 453, 454, 455, 533, 534, 535, 543, 544, 545, 553, 554, 555.

25-сүрөт

Чыгаруу. Үч орундуу сан үч цифрадан турган иреттелген кортеж (үчтүк) болот. Үч орундуу санды жазуу үчүн пайдаланылуучу бардык цифралардын саны үчөө. Сандын жазылышында жүздүктүн цифрасы катары 0 цифрасы пайдаланылбайт. Ошондуктан жүздүктүн цифрасын 2 гана түрдүү жол менен тандап алууга болот. Ондуктун цифрасын жазуу үчүн 0, 2 жана 5 цифраларынын каалаган бирин пайдаланууга болот. Демек, ондуктун цифрасын тандоонун үч мүмкүнчүлүгү бар. Бирдиктердин цифраларын тандап алуунун да үч мүмкүнчүлүгү бар.

Эми маселени көптүктүн тилине которолу: A_1 – үч орундуу сандын жүздүгүндөгү, A_2 – үч орундуу сандын ондугундагы, A_3 – үч орундуу сандын бирдигиндеги цифраларынын көптүктөрү болсун. Анда $A_1 = \{2,5\}$, $A_2 = \{0,2,5\}$ жана $A_3 = \{0,2,5\}$ көптүктөрүн алабыз. Мындан $n(A_1) = 2$, $n(A_2) = 3$ жана $n(A_3) = 3$ экендиктерине ээ болобуз.

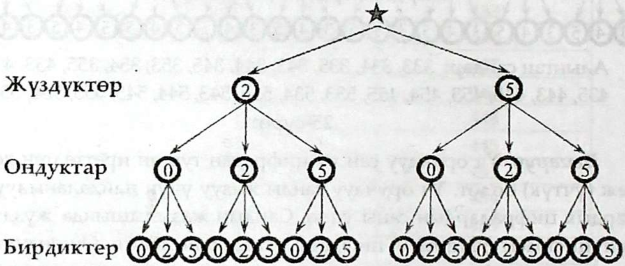
Мына ошентип, жүздүктүн цифрасын 2, ондуктун цифрасын 3 жана бирдиктин цифрасын 3 түрдүү жол менен тандап алууга болот. 0, 2 жана 5 цифраларынын жардамында канча үч орундуу сан түзүүгө боло тургандыгын аныктоо үчүн көбөйтүндү эрежесине ылайык ар бир цифраны тандап алуунун сандарын көбөйтөбүз: $n(A_1 \times A_2 \times A_3) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Демек, 18 үч орундуу сан түзүүгө болот.

Изделүүчү үч орундуу сандарды A_1, A_2 жана A_3 көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсүнүн жардамында табалы.

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{2, 5\} \times \{0, 2, 5\} \times \{0, 2, 5\} = \{\langle 2,0,0\rangle, \langle 2,0,2\rangle, \langle 2,0,5\rangle, \langle 2,2,0\rangle, \langle 2,2,2\rangle, \langle 2,2,5\rangle, \langle 2,5,0\rangle, \langle 2,5,2\rangle, \langle 2,5,5\rangle, \langle 5,0,0\rangle, \langle 5,0,2\rangle, \langle 5,0,5\rangle, \langle 5,2,0\rangle, \langle 5,2,2\rangle, \langle 5,2,5\rangle, \langle 5,5,0\rangle, \langle 5,5,5\rangle$.

Маселенин шартына ылайык бардык мүмкүн болгон үч орундуу сандарды графтын жардамында түзөлү (26-сүрөт).



Алынган сандар: 200, 202, 205, 220, 222, 225, 250, 252, 255, 500, 502, 505, 520, 522, 525, 550, 552, 555.

26-сүрөт

Демек, бул цифралардан 18 үч орундуу сан түзүүгө болот.

Жообу: 18 үч орундуу сан.

11-маселе. 0, 2, 3, 4 жана 5 цифраларынын жардамында ар бир цифраны бирден гана жолу пайдаланып канча үч орундуу сан түзүүгө болот?

Чыгаруу. Сандын жазылышында жүздүктүн цифрасы катары 0 цифрасы пайдаланылбайт. Ошондуктан жүздүктү 4 түрдүү жол менен тандап алууга болот. Маселенин шарты боюнча ар бир цифра бирден гана жолу пайдаланылат. Тандоонун 5 мүмкүнчүлүгүнөн 4 мүмкүнчүлүк калган. Демек, ондуктун цифрасын да 4 түрдүү жол менен тандап алуунун мүкүнчүлүгү бар. Үч орундуу сандын бирдиктерин жазуу үчүн тандоонун үч мүмкүнчүлүгү калды. Ошондуктан бирдиктердин цифраларын тандап алуунун үч мүмкүнчүлүгү бар.

Эми маселени көптүктүн тилине которолу: A_1 – үч орундуу сандын жүздүгүндөгү, A_2 – үч орундуу сандын ондугундагы, A_3 – үч орундуу сандын бирдигиндеги цифраларынын көптүктөрү болсун. Мындан $n(A_1) = 4$, $n(A_2) = 4$ жана $n(A_3) = 3$ экендиктерине ээ болобуз.

Мына ошентип, жүздүктүн цифрасын 4, ондуктун цифрасын 4 жана бирдиктин цифрасын 3 түрдүү жол менен тандап алууга болот. Көрсөтүлгөн цифралардын жардамында канча үч орундуу сан түзүүгө боло тургандыгын аныктоо үчүн, көбөйтүндү эрежесине ылайык ар бир цифраны тандап алуунун сандарын көбөйтөбүз: $n(A_1 \times A_2 \times A_3) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

Демек, 48 үч орундуу сан түзүүгө болот.

Жообу: 48 сан.

Жогорудагы маселенин графын өз алдыңарча түзгүлө.

12-маселе. Китепканада Ч. Айтматовдун 8, К. Жантөшевдин 5 жана Т. Касымбековдун 4 ар түрдүү китептери бар. Студент 3 китепти: биринчи 1 китеп Ч. Айтматовдун; экинчи 1 китеп К. Жантөшевдин; үчүнчү 1 китеп Т. Касымбековдун китеби боло тургандай кылып канча түрдүү жол менен тандай алат?

Чыгаруу. A_1 – Ч. Айтматовдун, A_2 – К. Жантөшевдин, A_3 – Т. Касымбековдун китептеринин көптүктөрү болсун. Анда $n(A_1) = 8$, $n(A_2) = 5$ жана $n(A_3) = 4$ китептердин саны болот. Ч. Айтматовдун бир китебин 8 түрдүү жол менен тандап алууга болот. Эгерде биринчи 1 китеп тандалып алынган болсо, анда экинчи 1 китепти 5 түрдүү жол менен, үчүнчү 1 китепти 4 түрдүү жол менен тандап алууга болот. Анда көбөйтүндү эрежесине таянып төмөнкүнү алабыз:

$$n(A_1 \times A_2 \times A_3) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) = 8 \cdot 5 \cdot 4 = 160.$$

Демек, ар бир жазуучунун китебинен бирден китепти 160 түрдүү жол менен тандап алууга болот.

Жообу: 160 түрдүү жол.

Сумманын жана көбөйтүндүнүн комбинаторикалык эрежелери маселелерди жана атайын формулаларды келтирип чыгарууда колдонулат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

12. Оштон Бишкекке таксиде, кичи автобуста жана самолетто барууга болот. Ал эми Бишкектен Балыкчыга таксиде, кичи автобуста, самолетто жана поездде барууга болот. Оштон Бишкек аркылуу Балыкчыга канча түрдүү жол менен барууга болот?

13. 2, 3, 4 жана 5 цифраларынын жардамында канча эки орундуу сан түзүүгө болот? Бул цифраларды бир гана жолу пайдаланып канча эки орундуу сан түзүүгө болот?

14. 2, 3, 4, 5 жана 6 цифраларын пайдаланып канча эки орундуу сан түзүүгө болот? Бул цифраларды бир гана жолу пайдаланып канча эки орундуу сан түзүүгө болот?

15. 2, 3, 5 жана 6 цифраларынын жардамында канча үч орундуу сан түзүүгө болот? Бул цифраларды бир гана жолу пайдаланып канча үч орундуу сан түзүүгө болот? Алардын эң чоңу менен эң кичинесинин айырмасын тапкыла.

16. 1, 2, 3 жана 4 цифраларын пайдаланып канча төрт орундуу сан түзүүгө болот? Бул цифраларды бир гана жолу пайдаланып канча төрт орундуу сан түзүүгө болот?

17. Класста 10 предмет окутулат. Дүйшөмбү күнү 6 ар түрдүү сабак окулат. Дүйшөмбү күнү үчүн сабактын канча түрдүү жадыбалын түзүүгө болот?

18. 4-класста 8 предмет окутулат. Жуманын дүйшөмбү күнү 5 ар түрдүү сабак окутулат. Ушул күнгө сабактын жадыбалын канча түрдүү жол менен түзүүгө болот?

19. 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынын жардамында бардык эки орундуу сандарды жазгыла жана төмөнкү шарттарды канааттандырган түгөйлөрдүн камтылуучу көптүктөрүн бөлүп көрсөткүлө:

а) 4 цифрасы менен башталган;

б) 5 цифрасы менен аяктаган;

в) бирдей цифралары бар;

г) 1 цифрасы менен аяктаган жана 5 цифрасы менен башталган;

д) 2 же 3 цифрасы менен башталган.

20. Эгерде:

а) цифралары кайталанса;

б) цифралары кайталанбаса;

в) цифралары так болсо (цифралары кайталанышы мүмкүн), анда 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 цифраларынын жардамында канча төрт орундуу сан түзүүгө болот?

21. 3, 6 жана 8 цифраларын пайдаланып 1000ден кичине болгон канча сан түзүүгө болот? Алардын ичинен канчасы жуп, канчасы так сан болот?

22. Экология ийримине 6 кыз жана 4 бала катышат. Бир кыз жана бир баланы олимпиадага жөнөтүү керек. Олимпиадага жөнөтүү үчүн бир кыз жана бир баладан турган түгөйдү канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

23. 1-класстын окуучулары үчүн белек катары 4 ар түрдүү жазуучунун китептерин жана 5 ар түрдүү оюнчуктарды сатып алышты. Бир китептен жана бир оюнчуктан турган белекти канча түрдүү жол менен түзүүгө болот?

24. 0, 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынын жардамында 10го бөлүнүүчү цифралары кайталанбоочу жана кайталануучу канча үч орундуу сан түзүүгө болот?

25. Мелдешке 10 команда катышат. Биринчи, экинчи жана үчүнчү байгелүү орундарын канча түрдүү жол менен бөлүштүрүүгө болот?

26. Азамат жаңы жылдык карновалга мушкетердун костюмун кийип барууну чечти. Ага турмуш-тиричилик үйүнүн прокатынан ар түрдүү фасондогу жана түстөгү кийимдерди тандап алууну сунушташты: 4 камзол, 3 шляпа жана 2 түгөй өтүк. Бул буюмдардан канча түрдүү карновалдык костюмдарды түзүүгө болот?

27. Группанын студенттери тоодогу көлгө туристтик жүрүшкө чыгууну чечишти. Көлгө үч этап менен баруута болот. Биринчи этабында поездде жана автобуста, экинчи этабында велосипедде, кайыкта жана жөө, үчүнчү этабында асма жолдо жана жөө баруута болот. Туристтик жүрүшкө канча түрдүү жол менен чыгууга болот?

28. Көп кабаттуу үйдүн эшигине 0, 1, 2, 3, 4, 5 цифралары жазылган кулпу (домофон) орнотулган. Эшикти ачуу үчүн ар бир квартирага үч ар түрдүү цифрадан турган код берилген. Эгерде үйдө 120 квартира болсо, анда бардык квартирага коддук кулпу жетеби?

29. Факультеттин ашканасында биринчи тамактын 5 кылы, экинчи тамактын 4 кылы, десерттин 3 кылы даярдалат. Түштөнүү үчүн биринчи тамактан бирди, экинчи тамактан бирди жана десерттен бирди канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

30. 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынын жардамында канча эки орундуу 50дөн кичине болгон сан түзүүгө болот?

31. 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынын жардамында канча эки орундуу 50дөн кичине болгон так сан түзүүгө болот?

32. 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынын жардамында канча эки орундуу 30дан чоң болгон сан түзүүгө болот?

3-ГЛАВА

КОМБИНАТОРИКАНЫН НЕГИЗГИ ФОРМУЛАЛАРЫ

3.1. КАЙТАЛАНУУЧУ ОРУНДАШТЫРУУЛАР

Ар кандай комбинаторикалык маселелерди чыгаруу учурунда m объектиден турган көптүктөн k объектисин канча түрдүү жол менен тандап алууга болот деген суроо келип чыгат. Мында k объектиси кандайдыр бир тартипте тандалып алынууга тийиш.

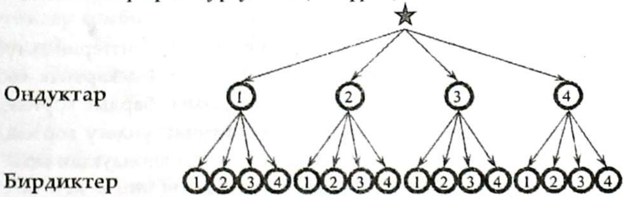
1-маселе. 1, 2, 3 жана 4 цифраларынын жардамында канча эки орундуу сан түзүүгө болот?

Чыгаруу. Маселени көптүктөр теориясынын тилине которолу. Анда $A = \{1, 2, 3, 4\}$ көптүгүн алабыз. Эки орундуу сан алуу үчүн $A \times A$ декарттык көбөйтүндүсүн табалы.

$A \times A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$.

Изделип жаткан сандар 16 түгөй түрүндө пайда болду.

Маселенин графын тургузалы (27-сүрөт).



Алынган сандар: 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.

27-сүрөт

$A \times A$ декарттык көбөйтүндүсүндөгү бардык мүмкүн болгон түгөйлөрдүн саны $n(A \times A) = n(A) \cdot n(B) = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ болот. Бул комбинацияларды таблицанын жардамында да түзүүгө болот.

Жообу: 16 эки орундуу сан.

Ондуктун цифралары	Бирдиктин цифралары			
	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

Эми m элементтен турган A көптүгү берилсин. Ал көптүктүн элементтеринен k узундуктагы канча кортеж түзүүгө болот? Мында $k \leq m$.

Бул маселени чыгаруу үчүн k көбөйтүүчүнү камтыган $A \times A \times \times \ldots \times A$ декарттык көбөйтүндүсүндөгү кортеждердин санын табуу керек.

1-аныктама. m элементтүү көптүктүн элементтеринен түзүлгөн k узундуктагы кортеждер m элементтен k боюнча ***кайталануучу орундаштыруу*** деп аталат.

m элементтен k боюнча бардык мүмкүн болгон кайталануучу орундаштыруулардын саны $\bar{A}_m^k$ символу менен белгиленет. $\bar{A}_m^k$ белгиси «m элементтен k боюнча кайталануучу орундаштыруу» деп окулат.

1-теорема. m элементтен k боюнча кайталануучу орундаштыруулардын саны

$$\bar{A}_m^k = m^k \qquad (1)$$

формуласы менен эсептелет.

Далилдөө. m элементтүү A көптүгүнүн элементтеринен түзүлгөн k узундуктагы ар бир кортеж $A \times A \times \ldots \times A$ декарттык көбөйтүндүсүнүн элементи болуп эсептелет. Демек, бардык кортеждердин саны $A \times A \times \ldots \times A$ декарттык көбөйтүндүсүндөгү кортеждердин санына барабар болот. Мында $n(A) = m$. Ошондуктан аны

$$n(\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ жолу}}) = \underbrace{n(A) \cdot n(A) \cdot \ldots \cdot n(A)}_{k \text{ жолу}} = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{k \text{ жолу}} = m^k$$

көрүнүшүндө жазууга болот. Демек,

$$\bar{A}_m^k = m^k. \qquad (1)$$

Теорема далиденди.

2-маселе. 10 цифранын жардамында канча 3 орундуу сан түзүүгө болот?

Чыгаруу. (1) формула боюнча бардык комбинациялардын саны $10^3 = 1000$ болот. Демек, 10 цифранын жардамында 1000 ар түрдүү үч орундуу сан түзүүгө болот.

Жообу: 1000 үч орундуу сан.

3-маселе. 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынын жардамында канча үч орундуу так сан түзүүгө болот?

Чыгаруу. Берилген цифралардын жардамында түзүүгө мүмкүн болгон бардык үч орундуу сандардын саны $\bar{A}_5^3$ туюнтмасына барабар. Жогорудагы цифралардын ичинен үчөө, б.а. $\frac{3}{5}$ бөлүгү так. 1, 3 жана 5 цифралары менен аяктаган так сандар болушат. Ошондуктан изделүүчү так үч орундуу сандардын саны төмөнкүгө барабар болот:

$$\frac{3}{5}\bar{A}_5^3 = \frac{3}{5}\cdot 5^3 = 3\cdot 5^2 = 3\cdot 25 = 75.$$

Жообу: 75 үч орундуу так сан.

КӨНҮГҮҮЛӨР

33. $X = \{a, b, c, d, e\}$ көптүгүнүн элементтеринин жардамында узундугу 2ге барабар болгон бардык кортеждерди түзгүлө. Бул кортеждер комбинаторикада эмне деп аталат? Канча кортеж пайда болду?

34. Эсептегиле:

а) $\bar{A}_4^2$; б) $\bar{A}_4^3$; в) $\bar{A}_5^2$; г) $\bar{A}_5^3$;
д) $\bar{A}_6^2$; е) $\bar{A}_7^2 + \bar{A}_4^3$; ж) $\bar{A}_6^3 - \bar{A}_5^3$; з) $\bar{A}_4^3 \cdot \bar{A}_3^2$;
и) $\bar{A}_8^3 : \bar{A}_4^3$.

35. 4, 5, 6 цифраларынын жардамында бардык мүмкүн болгон эки орундуу сандарды түзгүлө. Канча эки орундуу сан пайда болду?

36. 4, 5, 6, 7 цифраларынын жардамында бардык мүмкүн болгон эки орундуу сандарды түзгүлө. Канча эки орундуу сан пайда болду?

37. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 цифраларынын жардамында канча үч орундуу сан түзүүгө болот?

38. 0, 2, 3 цифраларынын жардамында 100дөн кичине болгон бардык сандарды түзгүлө. Канча сан пайда болду?

39. 0, 1, 2 цифраларынын жардамында канча төрт орундуу сан түзүүгө болот?

40. 1, 2, 3, 4 цифраларынын жардамында канча төрт орундуу сан түзүүгө болот?

41. Кинотеатрга, театрга жана концертке бирден билет бар. Билеттерди 4 студентке канча түрдүү жол менен бөлүштүрүүгө болот?

42. Кыргыз Республикасында менчик автомобилдер үчүн 3 цифрадан жана латын алфавитинин 3 тамгасынан турган, өлкөнүн улуттук желеги тартылган, эл аралык коду жана региондордун номери белгиленген жаңы үлгүдөгү номерлер киргизилди. Өлкөдө 9 регион бар. Ар бир регион үчүн 3 цифрадан жана 26 латын алфавитинин 3 тамгасынан турган канча номер түзүүгө болот? Өлкө боюнча канча номер түзүүгө болот?

3.2. КАЙТАЛАНБООЧУ ОРУН АЛМАШТЫРУУЛАР

m элементтен турган A көптүгү берилсин. Бул көптүктүн элементтерин кандайдыр бир жол менен номерлеп чыгалы: $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

Бир эле көптүктү ар түрдүү жолдор менен иреттөөгө болот. Маселен, группанын студенттерин жашы, бою, салмагы, аты, фамилиясы, жетишүүсү ж.б. боюнча иреттөөгө болот.

2-аныктама. Эгерде A көптүгүнүн элементтери кандайдыр бир жол менен иреттелген болсо, анда ал ***иреттелген*** деп аталат.

Иреттелген көптүк кортеж түшүнүгүнүн жекече учуру. Ал жалпы кортеж түшүнүгүнөн иреттелген көптүктүн бардык элементтери ар түрдүү болсун деген шарт менен ажыратылып алынат. Маселен, $\langle 1, 2, 1, 3, 4, 3 \rangle$ кортежи иреттелген көптүк болбойт, ал эми $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$ кортежи – иреттелген көптүк.

3-аныктама. Бири-биринен элементтеринин жайгашуу тартиби менен гана айырмаланган иреттелген m элементтүү көптүк m элементтен ***кайталанбоочу орун алмаштыруу*** деп аталат.

m элементтен орун алмаштыруулардын саны P_m символу менен белгиленет жана «m элементтен кайталанбоочу орун алмаштыруу» деп окулат. P – *permutation* сөзүнүн баш тамгасы. Ал – француз сөзү, кыргызча орун алмаштыруу деп которулат.

Эгерде көптүк $\{a, b, c\}$ деген үч элементтен турса, анда ал көптүктү 6 түрдүү жол менен иреттөөгө болот: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$. Бул көптүктөр бири-биринен элементтеринин жайгашуу тартиби боюнча гана айырмаланышат.

Чындыгында, биринчи элементти тандоонун 3 ар түрдүү жолу бар. Биринчи орунга бир элементти тандап алгандан кийин экинчи орунга элементти тандоонун 2 мүмкүнчүлүгү калат. Экинчи орунга элементти тандап алгандан кийин үчүнчү орунга элементти бир гана жол менен тандап алууга болот. Көбөйтүндү эрежеси боюнча $\{a, b, c\}$ көптүгүн $3 \cdot 2 \cdot 1$, б.а. $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ жолу иреттөөгө болот. Бул көптүктүн элементтеринен түзүлгөн бардык мүмкүн болгон орун алмаштырууларды жазып чыгуу менен келтирилген мисалдардын тууралыгына ынанууга болот. Демек, $P_3 = 6$.

m элементтүү A көптүгүн канча түрдүү жол менен иреттөөгө болот? Ал үчүн m элементтен турган көптүктүн бардык мүмкүн болгон орун алмаштырууларынын санын аныктоо керек.

4-аныктама. 1ден m ге чейинки бардык натуралдык сандардын көбөйтүндүсү «эм факториал[1]» деп аталат жана $m!$ деп жазылат.

Мисалы, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. $0! = 1$ деп кабыл алынган.

2-теорема. m элементтен турган көптүктүн ар түрдүү орун алмаштырууларынын саны

[1]Факториал – *factor* – англис сөзү, көбөйтүүчү. Факториал – Z_+ көптүгүндө берилген функция.

$$P_m = m! \tag{2}$$

формуласы менен эсептелет.

Далилдөө. m элементтүү көптүктү иреттеген учурда анын кандайдыр бир элементи биринчи, кийинкиси экинчи ж.б.у.с. кандайдыр бир элементи m–чи номерди алат. Биринчи номерди көптүктүн каалаган элементи алышы мүмкүн. Демек, биринчи элементти m түрдүү жол менен тандоого болот. Көптүктүн калган каалаган элементи катары экинчи элемент келиши мүмкүн. Демек, аны $m-1$ түрдүү жол менен, үчүнчү элементин $m-2$ түрдүү жол менен тандоого болот ж.б. Эң аягында, акыркы, б.а. m–чи орунда бир гана элемент калат. Аны $m-(m-1) = m-m+1 = 1$ гана түрдүү жол менен тандоого болот. Көбөйтүндү эрежесинин негизинде m элементтен турган көптүктүн бардык мүмкүн болгон иреттөөлөрүнүн саны $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ көбөйтүндүсүнө барабар.

Мына ошентип, $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = m!$ экендигине ээ болобуз. Демек, $P_m = m!$ экендиги далилденди.

Бул учурда ар түрдүү жолдор менен иреттелген m элементтүү көптүк бирдей элементтерден турат жана элементтери кайталанбайт. Алар бири-биринен элементтеринин жайгашуу иреты менен гана айырмаланышат.

4-маселе. «Бүгүн жамгыр жаап жатат» сүйлөмүнүн сөздөрүнөн канча төрт сөздөн турган сүйлөм түзүүгө болот?

Чыгаруу. Маселеде ар түрдүү төрт элементтен турган орун алмаштыруулар жөнүндө сөз болууда: бүгүн, жамгыр, жаап, жатат. Бардык орун алмаштыруулардын саны $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ болот.

Жообу: 24 сүйлөм түзүүгө болот.

5-маселе. Дүйшөмбүгө 5 ар түрдүү сабак пландалган: математика, адабий окуу, мекен таануу, сүрөт жана кыргыз тили. Бул күнгө сабактын жадыбалын канча түрдүү жол менен түзүүгө болот?

Чыгаруу. Жадыбалдын ар бир вариантын 5 сабактан турган орун алмаштыруу катары эсептөөгө болот. Ошондуктан бардык варианттардын саны 5 элементтен турган кайталанбоочу орун алмаштыруулардын санына барабар: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Жообу: 120 түрдүү жол менен жадыбал түзүүгө болот.

6-маселе. Кызыл, көк, сары түстөгү кийиздер шырдактын оймосу, жээги (контуру) жана жердиги (негизи) катары пайдаланылган. Бул кийиздерден канча түрдүү ыкма менен шырдак жасоого болот?

Чыгаруу. Маселеде ар түрдүү түстөгү үч кийизден турган компоненттердин орун алмаштыруулары жөнүндө сөз болууда. Андагы кырдаал элестүү болсун үчүн шырдакты көрсөтөлү (28-сүрөт).

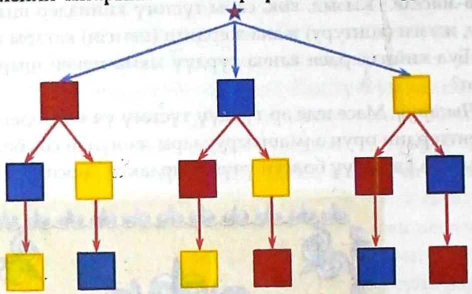
28-сүрөт

Эми үч түстөгү кийизден шырдак жасоонун варианттарынын фрагменттерин сүрөттөйлү (29-сүрөт).

29-сүрөт

Үч түстөгү кийизден канча түрдүү ыкма менен шырдак жасоого боло тургандыгын кайталанбоочу орун алмаштыруулардын санынын формуласы менен табабыз: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Маселенин чыгарылышынын граф модели (30-сүрөт).



30-сүрөт

Жообу: 6 түрдүү жол менен шырдак жасоого болот.

7-маселе. Эгерде сандардын жазылышында бир да цифра эки жолу кайталанбаса, анда 0, 1, 2, 3 цифраларынын жардамында канча төрт орундуу сан түзүүгө болот?

Чыгаруу. (2) формула боюнча төрт цифранын жардамында түзүлгөн орун алмаштыруулардын саны $P_4 = 4!$ га барабар. Нөл цифрасы төрт орундуу сандын миңдиги боло албагандыктан, изделүүчү сан $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18$ болот .

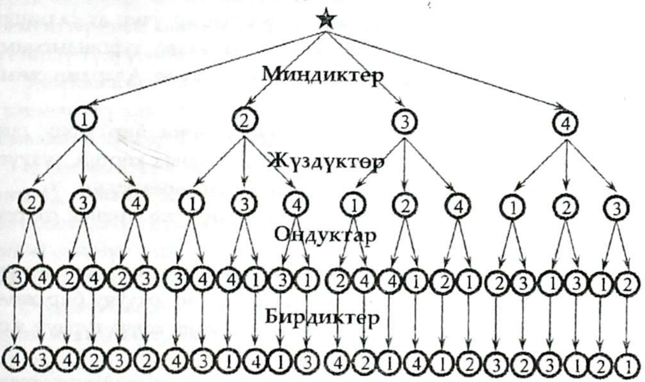
8-маселе. 1, 2, 3, 4, 5 цифраларын бирден гана жолу пайдаланып, 5ке эселүү болбогон канча беш орундуу сан түзүүгө болот?

Чыгаруу. Беш ар түрдүү цифранын жардамында P_5 сандагы беш орундуу сан түзүүгө болот. Ал сандардын ичинде 5ке эселүү болгон сандар да бар. Алар 5 цифрасы менен аяктайт жана 1, 2, 3, 4 цифраларынын орун алмаштырууларынын саны канча болсо, ошончо, б.а. P_4 санына барабар болот. Демек, 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынан $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$ санына барабар 5ке эселүү болбогон сан түзүүгө болот.

Жообу: 96 түрдүү ыкма менен түзүүгө болот.

9-маселе.1, 2, 3, 4 цифраларын бирден гана жолу пайдаланып, канча төрт орундуу сан түзүүгө болот?

Чыгаруу: Төрт ар түрдүү цифранын жардамында P_4 сандагы төрт орундуу сан түзүүгө болот. Ошондуктан бул кайталанбоочу орун алмаштыруулардын саны: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Маселенин граф моделин түзөлү (31-сүрөт).



Алынган сандар: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2341, 2314, 2431, 2413, 3124, 3142, 3241, 3214, 3421, 3412, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

31-сүрөт

КӨНҮГҮҮЛӨР

43. Туюнтмалардын маанилерин тапкыла:

а) $6!$; б) $10!$; в) $8!$; г) $7! + 3!$;

д) $9! - 6!$; е) $\frac{12!}{10!}$; ж) $\frac{14!}{8! \cdot 5!}$; з) $\frac{18!}{15! \cdot 6!}$;

и) $\frac{11! + 9!}{10! - 9!}$; к) $\frac{4! + 5! + 6!}{6! - 4!}$; м) $\frac{16! - 15 \cdot 15! - 14 \cdot 14!}{13!}$.

44. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; б) $\frac{(n-2)!}{(n+1)!}$;

45. Жанар, Марат жана Үмүт шахмат боюнча мелдеште биринчи, экинчи жана үчүнчү байгелүү орундар үчүн ат салышат. Мелдеште балдардын кандай орундарды ээлей тургандыгынын бардык мүмкүн болгон варианттарын көрсөткүлө. Алардын санын эсептегиле.

46. $A = \{a, b, c, d\}$ көптүгүнүн элементтерин бир жолу гана пайдаланып, узундугу 4кө барабар болгон канча кортеж түзүүгө болот? Алардын бардык варианттарын түзүп көрсөткүлө.

47. 8 адамды орундуктарга канча түрдүү жол менен отургузууга болот?

48. Класска жума (жекшембиден башка күндөрү) ичи дежурлук кылуута 6 окуучу бөлүнгөн. Эгерде ар бир окуучу бир жолу гана дежур болсо, анда дежур болуунун кезегин канча түрдүү жол менен түзүүгө болот?

49. 5 китепти текчеге канча түрдүү жол менен жайгаштырууга болот?

50. Турнирге 6 окуучу катышат. Алардын арасында орундар канча түрдүү жол менен бөлүштүрүлүшү мүмкүн?

51. Финалга чыккан 4 күлүктү канча түрдүү жол менен 4 чуркоочу жолго коюга болот?

52. Асел, Айдай жана Гүлү концертке биринчи катардан 1-, 2- жана 3-орундуктарга билет алышты. Бул орундуктарга кыздарды жайгаштыруунун канча түрдүү жолу бар?

53. 0, 1, 2, 3 цифраларынын жардамында канча төрт орундуу сан түзүүгө болот?

54. 0, 1, 2, 3 цифраларын бир жолу гана пайдаланып, канча төрт орундуу жуп сан түзүүгө болот? Алардын бардык варианттарын түзүп көрсөткүлө.

55. 1, 2, 3, 4, 5, 6 цифраларын бир жолу гана пайдаланып, 5ке эселүү болбогон канча алты орундуу сан түзүүгө болот?

3.3. КАЙТАЛАНБООЧУ ОРУНДАШТЫРУУЛАР

Кандайдыр бир чектүү көптүктүн иреттелген камтылуучу көптүктөрүн тандоо менен байланышкан комбинаторикалык маселелерди карайлы. «m элементтен турган A көптүгү берилсин. Анын элементтеринен канча k элементтүү иреттелген камтылуучу көптүктөрдү түзүүгө болот?» деген маселе түзөлү.

5-аныктама. m элементтүү көптүктүн каалагандай иреттелген k элементтүү камтылуучу көптүгү ($m \geq k$) m элементтен k боюнча ***кайталанбоочу орундаштыруу*** деп аталат.

m элементтен k боюнча кайталанбоочу орундаштыруулардын саны A_m^k символу менен белгиленет жана «m элементтен k боюнча кайталанбоочу орундаштыруулардын саны» деп окулат. *A – arrangement* сөзүнүн баш тамгасынан алынган. Ал – француз сөзү, кыргызча, орундаштыруу, иретке салуу деп которулат.

Эгерде эки орундаштыруу бири-биринен жок дегенде бир элементи менен айырмаланса же бирдей элементтерден туруп, элементтеринин жайгашуу тартиби менен айырмаланса, анда алар аныктама боюнча ар түрдүү орундаштыруулар болушат.

3-теорема. m элементтен k боюнча ар түрдүү орундаштыруулардын саны эң чоңу m болгон удаалаш k натуралдык сандын көбөйтүндүсүнө барабар, б.а.

$$A_m^k = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot (m-k+1) \text{ же}$$

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}. \tag{3}$$

Далилдөө. m элементтүү A көптүгү берилсин. Бул көптүктүн элементтеринен k элементтен турган кайталанбоочу ар түрдүү орундаштырууларды түзөлү. Анда m элементтүү көптүктүн иреттелген k элементтүү камтылуучу көптүгүндөгү 1-орунга m элементтин ичинен каалаган бирин коюуга болот. Экинчи орунга элементти $m-1$ түрдүү жол менен, үчүнчү орунга $m-2$ түрдүү жол менен тандоого болот ж.б.у.с. Акыркы k-орунга коюлган $m-(k-1) = m-k+1$ элементтин ичинен каалаган бирин коюга болот. Көбөйтүндү эрежесин пайдаланып төмөнкүнү жазабыз:

$$A_m^k = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$$

Бул формуланы башкача жазууга да болот. Ал үчүн барабардыктын оң жагын $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-k)$ көбөйтүндүсүнө бир учурда бөлөбүз жана көбөйтөбүз.

$$A_m^k = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-k+1) \cdot (m-k) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m-k) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Демек, $A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$.

Теорема далилденди.

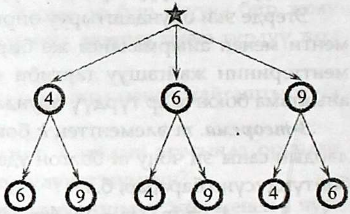
10-маселе. 4, 6, 9 цифраларын бир жолу гана пайдаланып, канча эки орундуу сан түзүүгө болот?

Чыгаруу. Маселенин шарты боюнча сандын жазылышында цифралар кайталанбайт. Ошондуктан бул 3 элементтен 2 боюнча кайталанбоочу орундаштыруу болот:

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Ондуктардын цифралары

Бирдиктердин цифралары



Алынган сандар: 46, 49, 64, 69, 94, 96.

32-сүрөт

Маселенин граф моделинен цифралары кайталанбаган пайда болгон эки орундуу сандарды көрүүгө болот (32-сүрөт).

Ушул эле эки орундуу сандарды таблицанын жардамында да табууга болот. Демек, цифралары кайталанбоочу 6 эки орундуу сан түзүүгө болот: 46, 49, 64, 69, 94, 96.

Ондуктары	Бирдиктери		
	4	6	9
4		46	49
6	64		69
9	94	96	

Жообу: 6 эки орундуу сан түзүүгө болот.

11-маселе. 4, 6, 9 цифраларын бир жолу гана пайдаланып, канча үч орундуу сан түзүүгө болот?

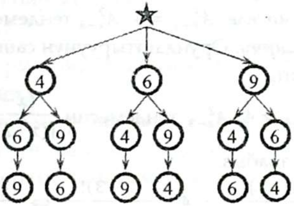
Чыгаруу. Мында 3 элементтен 3 боюнча кайталанбоочу орундаштыруу каралууда. Аны (3) формула менен эсептөөгө болот. Маселенин графын түзөлү (33-сүрөт).

$$A_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Жүздүктөрү

Ондуктары

Бирдиктери



Алынган сандар: 469, 496, 649, 694, 946, 964.

33-сүрөт

Бул маселенин таблицалык моделин да көрсөтөлү.

Жүздүктөр	Ондуктар	Бирдиктер	Алынган сандар
4	6	9	469
	9	6	496
6	4	9	649
	9	4	694
9	4	6	946
	6	4	964

Жообу: 6 үч орундуу сан түзүүгө болот.

Бул учурда цифралардын ордун алмаштыруудан ар түрдүү сандар келип чыккандыгын байкоого болот.

Ошондуктан m элементтен m боюнча орундаштырууларды m элементтен кайталанбоочу орун алмаштыруу катары кароого болот.

Демек, $m = k$ болгон учурда

$$A_m^m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = \frac{m!}{1} = m! = P_m \text{ болот.}$$

12-маселе. A_{40}^{35} туюнмасынын маанисин эсептегиле.

Чыгаруу. Орундаштыруунун санын табуу үчүн $A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$ формуласын пайдаланабыз.

$$A_{40}^5 = \frac{40!}{(40-5)!} = \frac{40!}{35!} = \frac{35!\cdot36\cdot37\cdot38\cdot39\cdot40}{35!} = 36\cdot37\cdot38\cdot39\cdot40 =$$
$$= 2763633600.$$

***Жообу*:** 2763633600.

13-маселе. $A_{x-2}^3 = 4\cdot A_{x-3}^2$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Орундаштыруунун санын табуунун формуласын пайдаланып,

$A_{x-2}^3 = 4\cdot A_{x-3}^2$ теңдемесин $\frac{(x-2)!}{[(x-2)-3]!} = 4\cdot\frac{(x-3)!}{[(x-3)-2]!}$ түрүндө жазып алабыз.

$$\frac{(x-2)!}{[(x-2)-3]!} = 4\cdot\frac{(x-3)!}{[(x-3)-2]!} \Leftrightarrow \frac{(x-2)!}{(x-2-3)!} = 4\cdot\frac{(x-3)!}{(x-3-2)!} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)!}{(x-5)!} = 4\cdot\frac{(x-3)!}{(x-5)!} \Leftrightarrow \frac{(x-5)!(x-4)(x-3)(x-2)}{(x-5)!} =$$
$$= 4\cdot\frac{(x-5)!(x-4)(x-3)}{(x-5)!} \Leftrightarrow (x-4)(x-3)(x-2) = 4(x-4)\cdot(x-3).$$

$x \ge 5$ экендигин эске алып, теңдеменин эки жагын тең $(x-$ $-4)(x-3)$ көбөйтүндүсүнө бөлүп жиберебиз. Мындан, $x-2=$ $=4, x=6$ экендигине ээ болобуз.

Текшерүү. Табылган $x=6$ санын берилген теңдемеге коёбуз:

$$A_{6-2}^3 = 4\cdot A_{6-3}^2, \frac{(6-2)!}{[(6-2)-3]!} = 4\cdot\frac{(6-3)!}{[(6-3)-2]!},$$
$$\frac{4!}{(4-3)!} = 4\cdot\frac{3!}{(3-2)!}, \frac{4!}{1!} = 4\cdot\frac{3!}{1!}, \frac{4!}{1} = 4\cdot\frac{3!}{1}, 4! = 4\cdot3!, 4! = 4!.$$

Натыйжада туура сандык барабардык пайда болду. Демек, 6 саны берилген теңдеменин тамыры.

***Жообу*:** $x = 6$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

56. Эсептегиле:

а) A_4^2; б) A_6^3; в) $A_7^3 + A_5^3$; г) $A_8^5 - A_6^4$; д) $A_6^2\cdot A_4^2$;

е) $\frac{A_9^6}{A_7^3}$; ж) $\frac{A_{10}^5 \cdot A_{12}^8}{A_9^7}$.

57. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ көптүгүнүн элементтеринин жардамында элементтери кайталанбаган узундугу 2ге барабар болгон бардык кортеждерди түзгүлө. Бул кортеждер комбинаторикада эмне деп аталат? Канча кортеж пайда болду?

58. 1, 2, 3, 4, 5, 6 цифраларын бир жолу гана пайдаланып, канча эки орундуу сан түзүүгө болот?

59. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 цифраларын бир жолу гана пайдаланып, канча үч орундуу сан түзүүгө болот?

60. Класста 30 окуучу бар. Эгерде ар бир окуучу окуу секторунун жана дене тарбия секторунун башчылыгына шайланышы мүмкүн болсо, анда бул эки кызматтын башчыларын канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

61. Группада 25 студент бар. Группанын старостасын, профкомунун жана жаштар комитетинин төрагаларын канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

62. «Маселе» сөзүнүн тамгаларынын көптүгүнөн канча ар түрдүү кайталанбоочу орун алмаштырууларды түзүүгө болот?

63. Мелдешке 10 команда катышкан. Биринчи, экинчи жана үчүнчү орундарды бөлүштүрүүнүн канча варианты бар?

64. Жеңил атлетика боюнча мелдешке факультеттин 10 студенттен турган командасы катышты. Тренер 4×100 м эстафетасынын биринчи, экинчи, үчүнчү жана төртүнчү этаптарында кимдер чуркай тургандыгын канча түрдүү жол менен аныктай алат?

65. 5 ар түрдүү түстөгү материалдан канча 3 түстөгү желек жасоого болот?

66. Класста 8 предмет үйрөтүлөт. Шаршемби күнү ар түрдүү 4 предмет окутулат. Ал күнгө сабактардын жадыбалын канча түрдүү жол менен түзүүгө болот?

67. Тегиздиктен 5 чекит белгилешти. Аларды латын тамгалары менен белгилөө керек. Ал чекиттерди канча түрдүү жол менен белгилөөгө болот (латын алфавитинде 26 тамга бар)?

68. Футболдук командада 11 адам бар. Төмөнкүлөрдү канча түрдүү жол менен тандап алууга болот:

а) Команданын капитанын жана анын ассистентин;

б) Команданын капитанын, анын биринчи жана экинчи ассистенттерин.

69. Бардык эки орундуу сандарды эсептегиле.

70. Бардык үч орундуу сандарды эсептегиле.

71. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $A_x^4 = 10 \cdot A_{x-1}^2$; б) $A_x^3 = 56x$; в) $A_x^{x-3} = x \cdot P_{x-2}$;

г) $\frac{A_x^3 + A_x^5}{A_x^3} = 43$; д) $\frac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$; е) $\frac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3} = 210x$.

3.4. КАЙТАЛАНБООЧУ ТОПТОШТУРУУЛАР

m элементтүү көптүктүн k элементтүү камтылуучу көптүгүн түзүүдө элементтеринин жайгашуу тартибин билүү ар дайым эле зарыл боло бербейт. Берилген m элементтүү көптүктөн ар биринде k элемент болгон канча камтылуучу көптүк түзүүгө боло тургандыгын карайлы.

6-аныктама. m элементтүү көптүктүн бири-биринен жок дегенде бир элементи менен айырмаланган каалагандай k элементтүү камтылуучу көптүгү $(m \geq k)$ m элементтен k боюнча ***кайталанбоочу топтоштуруу*** деп аталат.

m элементтен k боюнча кайталанбоочу топтоштуруулардын саны C_m^k символу менен белгиленет жана «m элементтен k боюнча кайталанбоочу топтоштуруулардын саны» деп окулат.

Аныктама боюнча бири-биринен жок дегенде бир элементи менен айырмаланган эки топтоштуруу ар түрдүү топтоштуруулар болушат.

4-теорема. m элементтен k боюнча кайталанбоочу топтоштуруулардын саны

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} \qquad (4)$$

формуласы менен аныкталат.

Далилдөө. m жана k сандары аркылуу C_m^k санын туюндурган формуланы келтирип чыгаралы. m элементтүү X көптүгүнүн кандайдыр бир k элементтүү Y камтылуучу көптүгүн алалы. Y камтылуучу көптүгү k элементтен тургандыктан, аны $k!$ түрдүү жол менен иреттөөгө болот. Бул учурда X көптүгүнүн элементтеринен турган k элементтүү ар бир иреттелген камтылуучу көптүк ушундай жол менен алынат. Демек, X көптүгүнүн элементтеринен түзүлгөн k элементтүү иреттелген камтылуучу көптүктөрдүн саны X көптүгүндөгү иреттелбеген k элементтүү камтылуучу көптүктөрдүн санынан $k!$ эсеге чоң.

Маселен, $X = \{a, b, c, d\}$ көптүгүнүн элементтеринен үч элементтүү төрт камтылуучу көптүк түзүүгө болот:

$$\langle a, b, c\rangle, \langle a, b, d\rangle, \langle a, c, d\rangle, \langle b, c, d\rangle.$$

Бул камтылуучу көптүктөрдүн элементтеринен орун алмаштырууларды түзөлү. Натыйжада төмөнкүдөй орундаштыруулар пайда болот.

$$A_4^3 = 3! \cdot C_4^3 \quad \left.\overbrace{\begin{matrix} \langle a,b,c\rangle, \langle a,b,d\rangle, \langle a,c,d\rangle, \langle b,c,d\rangle \\ \langle a,c,b\rangle, \langle a,d,b\rangle, \langle a,d,c\rangle, \langle b,d,c\rangle \\ \langle b,a,c\rangle, \langle b,a,d\rangle, \langle c,a,d\rangle, \langle c,b,d\rangle \\ \langle b,c,a\rangle, \langle b,d,a\rangle, \langle c,d,a\rangle, \langle c,d,b\rangle \\ \langle c,a,b\rangle, \langle d,a,b\rangle, \langle d,a,c\rangle, \langle d,b,c\rangle \\ \langle c,b,a\rangle, \langle d,b,a\rangle, \langle d,c,a\rangle, \langle d,c,b\rangle \end{matrix}}^{C_4^3 = 4}\right\} P_3 = 6$$

Бул көптүктүн элементтеринен түзүлгөн 3 элементтүү иреттелген камтылуучу көптүктөрдүн саны X көптүгүндөгү иреттелбеген камтылуучу көптүктөрдүн санынан $3! = 6$ эсеге чоң.

Мисалдан көрүнүп тургандай орундаштыруулардын жана орун алмаштыруулардын санын эсептөөнүн формулаларынын жардамында топтоштуруулардын санынын формуласын жеңил алууга болот. Чындыгында, алгач m элементтен k боюнча бардык кайталанбоочу топтоштурууларды, андан кийин ар бир топтоштуруунун элементтеринен бардык мүмкүн болгон орун алмаштырууларды түзүп, бардык мүмкүн болгон m элементтен k боюнча орундаштырууларды алдык. Алардын саны A_m^k. Ар бир топтоштуруудан $k!$ сандагы орун алмаштыруулар алынды, ал эми бардык топтоштуруулардын саны C_m^k. Жогорудагы талкуулоолордун негизинде $A_m^k = k! \cdot C_m^k$ барабардыгына ээ болобуз. Бул формуладан $C_m^k = \frac{A_m^k}{P_m} = \frac{A_m^k}{k!} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ келип чыгат.

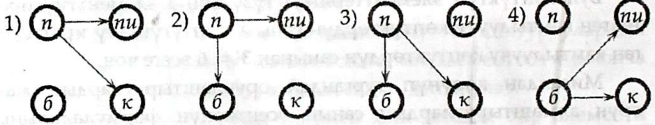
Демек, топтоштуруулардын саны $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ формуласы менен аныкталат.

14-маселе. Мектептин ашканасына помидор, пияз, бадыраң жана капуста алып келишти. Бул жашылчалардын эки түрүнөн канча ар түрдүү салат жасоого болот? Алардын бардык варианттарын жазгыла.

Чыгаруу. Бул жашылчаларды ирети менен жазып чыгалы: помидор, пияз, бадыраң, капуста. Эми салатка кирген жашылчалардын тобун жазабыз. Мында салатка кирген жашылчаларды тандоонун ирети мааниге ээ эмес.

1) Помидор, пияз, капуста;
2) Помидор, пияз, бадыраң;
3) Помидор, бадыраң капуста;
4) Бадыраң, пияз, капуста.

Эми элестүү болсун үчүн бул топтоштуруулардын граф моделин тургузалы (34-сүрөт). Мында пияз *пи* деп кыскартылып жазылды. Жебе чыккан жана ал барган элементтер камтылуучу көптүктөргө кирген элементтерди аныктайт.



34-сүрөт

Топтоштуруулардын саны (4) формула менен эсептелет. Мында $m = 4$, $k = 3$. $C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot(4-1)!} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{3!\cdot 4}{3!\cdot 1} = 4$. Демек, бул жашылчалардан 4 түрдүү салат жасоого болот.

Жообу: 4 түрдүү салат жасоого болот.

15-маселе. Сынак алуу үчүн эки мугалимден турган комиссия түзүү керек. 6 мугалимдин ичинен эки адамдан турган комиссияны канча түрдүү жол менен түзүүгө болот?

Чыгаруу. Ыңгайлуу болсун үчүн мугалимдерди тамгалар менен белгилеп алалы: A, B, C, D, E, F. Эми комиссиянын курамынын бардык мүмкүн болгон варианттарын жазып чыгалы:

$$AB, AC, AD, AE, AF,$$
$$BC, BD, BE, BF,$$
$$CD, CE, CF,$$
$$DE, DF$$
$$EF.$$

Мына ошентип, 15 ар түрдүү комиссия түзүүгө болот.

Маселенин таблицалык моделин көрсөтөлү.

Мугалимдер	A	B	C	D	E	F
A		A,B	A,C	A,D	A,E	A,F
B			B,C	B,D	B,E	B,F
C				C,D	C,E	C,F
D					D,E	D,F
E						E,F
F						

Боёлгон торчолор эки адамдан турган комиссияны, ал эми тамгалардын түгөйлөрү анын курамын билдирет. Мында боёлгон торчолордун саны 15.

Маселенин графын түзөлү. Анын чокулары тегерекчелер болсун жана аларды кесиндилер менен туташтыралы (35-сүрөт).

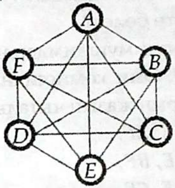
(4) формула боюнча топтоштуруулардын санын эсептейли. Мында $m = 6$, $k = 2$. $C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot4!} = \frac{4!\cdot5\cdot6}{2\cdot4!} = 15$. Демек, 6 мугалимден 15 ар башка комиссия түзүүгө болот.

Жообу: 15 ар башка комиссия түзүүгө болот.

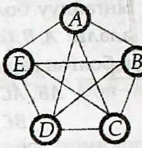
16-маселе. 5 классташ бала эрте менен мектепте жолугушуп, кол алышып саламдашышты. Саламдашуулардын санын тапкыла.

Чыгаруу. Ыңгайлуу болсун үчүн балдарды A, B, C, D жана E

тамгалары менен белгилеп алалы. Алгач графтын жардамында саламдашуулардын санын аныктайлы (36-сүрөт).

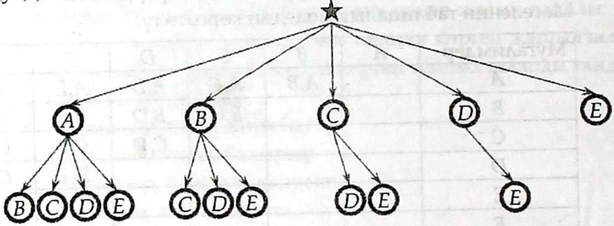


35-сүрөт



36-сүрөт

Натыйжада тегерекчелерди туташтырган 10 кесинди пайда болду. Демек, саламдашуулардын саны – 10.



37-сүрөт

36-сүрөттөгү графтын башка вариантын да көрсөтүүгө болот (37-сүрөт).

Таблица моделин көрсөтөлү.

Окуучулар	A	B	C	D	E
A		A,B	A,C	A,D	A,E
B			B,C	B,D	B,E
C				C,D	C,E
D					D,E
E					

Аны топтоштуруулардын формуласы менен да эсептөөгө болот.

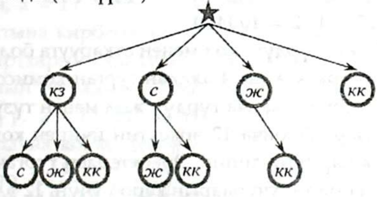
$C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{3!\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3!} = 2\cdot5 = 10.$

Жообу: 10 жолу саламдашышкан.

17-маселе. Көп кабаттуу үйлөрдүн ванналарына басуу үчүн 4 ар түрдүү түстөгү кафель сатып алышты: кызыл, сары, жашыл, көк. Ар бир ваннага эки түстөгү кафель басуу талап кылынат. Кафелди канча түрдүү жол менен тандоого болот?

Чыгаруу. Эки кафелден турган ар бир топ бири-биринен жок дегенде бир кафель менен айрмаланып туруута тийиш. Ошондуктан бул 4 элементтен 2 боюнча топтоштуруу болот: $C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{4!}{2!\cdot2!} = \frac{2!\cdot3\cdot4}{2!\cdot2} = 6.$

Эми граф моделин көрсөтөлү. Мында кафелдердин түстөрүнүн аттары кыскартылды, кызыл түстөгүсү *кз* жана көк түстөгүсү *кк* деп белгиленди (38-сүрөт).



38-сүрөт

Маселенин таблица моделин пайдаланып, кафелдерди тандоонун варианттарын көрсөтөлү:

Кафелдер	Кызыл	Сары		Жашыл		Көк	
Кызыл		*кз*	*с*	*кз*	*ж*	*кз*	*кк*
Сары				*с*	*ж*	*с*	*кк*
Жашыл						*ж*	*кк*
Көк							

Жообу: 6 түрдүү жол менен тандоого болот.

18-маселе. Спорт залда 10 студенттен турган баскетбол командасы машыгып жатат. Машыктыруучу 5 адамдан турган команданы канча түрдүү жол менен түзө алат?

Чыгаруу. Ар бир команда бири-биринен жок дегенде бир адамы менен айырмаланууга тийиш. Андыктан бул 10 элементтен 5 боюнча топтоштуруу болот. $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\cdot(10-5)!} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{5!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} =$
$= 252.$

19-маселе. Класста 16 бала жана 12 кыз окуйт. Мектеп аянтчасын тазалоо үчүн 4 баланы жана 3 кызды бөлүштүрүү керек. Муну канча түрдүү жол менен аткарууга болот?

Чыгаруу. Маселенин шартына ылайык 16 баланын ичинен 4 баланы тандап алуунун бардык мүмкүн болгон жолдору C_{16}^4 санына, ал эми 12 кыздын ичинен 3 кызды тандап алуунун бардык мүмкүн болгон жолдору C_{12}^3 санына барабар. Ал эми бардык топтоштуруулардын саны $C_{16}^4 \cdot C_{12}^3$ көбөйтүндүсүнө барабар болот.

$$C_{16}^4 \cdot C_{12}^3 = \frac{16!}{4!\cdot(16-4)!}\cdot\frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 12!}\cdot\frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 9!} =$$
$$= 13\cdot 14\cdot 10\cdot 10\cdot 11\cdot 2 = 400400.$$

Жообу: 400400 түрдүү жол менен аткарууга болот.

20-маселе. 3 эркек жана 4 аялдан турган комиссияны 12 эркек жана 8 аялдын тобунан канча түрдүү жол менен түзүүгө болот?

Чыгаруу. Шарт боюнча 12 эркектин ичинен комиссиянын курамына 3 эркек кирүүгө тийиш. Эркектерден турган комиссиянын бардык мүмкүн болгон учурларын кароо үчүн, 12 элементтүү көптүктүн бардык мүмкүн болгон 3 элементтүү камтылуучу көптүктөрүн табуу керек. Бул жерде ар түрдүү үч элементтен турган көптүктөр бири-биринен жок дегенде бир элементи (комиссиянын бир мүчөсү) менен айырмаланууга тийиш. Демек, эркектерден турган комиссия C_{12}^3 ыкма менен түзүлөт. Ушундай эле ыкма менен 8 аялдан 4 боюнча комиссия C_8^4 түрдүү жол менен түзүлөт. Көбөйтүндү эрежеси боюнча төмөнкүнү алабыз:

$$C_{12}^3 \cdot C_8^4 = \frac{16!}{4!\cdot(16-4)!}\cdot\frac{12!}{3!\cdot(12-3)!} = \frac{12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 12!}\cdot\frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 9!} =$$
$$= 220\cdot 70 = 15400.$$

Жообу: 15400 түрдүү жол менен түзүүгө болот.

21-маселе. $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$ теңдемесин төмөнкүдөй түрдө жазып алалы:

$\frac{(x-1)!}{[(x-1)-2]!} - \frac{x!}{1!(x-1)!} = 79.$ Андан ары теңдемени тең күчтө өзгөртүп түзөлү.

$$\frac{(x-1)!}{[(x-1)-2]!} - \frac{x!}{1!(x-1)!} = 79 \Leftrightarrow \frac{(x-1)!}{(x-3)!} - \frac{x!}{(x-1)!} = 79 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)!(x-2)(x-1)}{(x-3)!} - \frac{(x-1)!x}{(x-1)!} = 79 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) - x = 79 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - x = 79 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 77 = 0.$$

$x^2 - 4x - 77 = 0$ квадраттык теңдемесининин чечимин табабыз:

$d = 4^2 - 4 \cdot (-77) = 16 + 308 = 324 = 18^2.$

$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm 18}{2} = \frac{4 \pm 18}{2};$

Мындан, $x = 11$, $x = -7$ экендигине ээ болобуз. $x = -7$ аныкталуу областына кирбегендиктен чечим болбойт. $x = 11$ саны теңдеменин шарттарын канааттандырат. Ошондуктан теңдеменин чыгарылышынын тууралыгын текшеребиз.

Текшерүү. $x = 11$ санын $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$ теңдемесиндеги белгисиздин ордуна коюп, эсептөөлөрдү аткарабыз: $A_{11-1}^2 - C_{11}^1 = 79$, $A_{10}^2 - C_{11}^1 = 79, \frac{10!}{(10-2)!} - \frac{11!}{1!(11-1)!} = 79, \frac{10!}{8!} - \frac{11!}{10!} = 79, \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} - \frac{10! \cdot 11!}{10!} = 79, \frac{9 \cdot 10}{1} - \frac{11}{1} = 79, 90 - 11 = 79, 79 = 79.$

Демек, теңдеме туура чыгарылган.

Жообу: $x = 11$.

22-маселе. $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+1} \\ A_x^2 = 20 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу. Экинчи теңдемени чыгарабыз:

$A_x^2 = 20 \Leftrightarrow A_x^2 = \frac{x!}{(x-2)!} = 20 \Leftrightarrow (x-1)x = 20 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = = 0 \Leftrightarrow (x_1 = -4, x_2 = 5).$

$x > 2$ болгондуктан $x_1 = -4$ маселенин шартын канааттандырбайт.

$x_2 = 5$ти системанын биринчи теңдемесине коюп $C_5^y = C_5^{y+1}$ теңдемесин алабыз.

$$C_5^y = C_5^{y+1} \Leftrightarrow \frac{5!}{y!(5-y)!} = \frac{5!}{(y+1)![5-(y+1)]!} \Leftrightarrow \frac{5!}{y!(5-y)!} =$$

$$= \frac{5!}{(y+1)!(4-y)!} \Leftrightarrow y!\,(5-y)! = (y+1)!\,(4-y)! \Leftrightarrow y!\,(5-y)(4-y)! =$$

$$= y!\,(y+1)(4-y)! \Leftrightarrow 5-y = y+1 \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Мына ошентип, $x = 5$, $y = 2$ жообун алдык.

Текшерүү. $x = 5$ жана $y = 2$ сандарын $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+1} \\ A_x^2 = 20 \end{cases}$ теңдемелер системасындагы белгисиздердин ордуна коюп, эсептөөлөрдү аткарабыз:

$$\begin{cases} C_5^2 = C_5^{2+1} \\ A_5^2 = 20 \end{cases}, \begin{cases} C_5^2 = C_5^{2+1} \\ A_5^2 = 20 \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{(2+1)![5-(2+1)]!} \\ \dfrac{5!}{(5-2)!} = 20 \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5!}{3!2!} \\ \dfrac{5!}{3!} = 20 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{3!\cdot4\cdot5}{2\cdot3!} = \dfrac{3!\cdot4\cdot5}{3!\cdot2} \\ \dfrac{3!\cdot4\cdot5}{3!} = 20 \end{cases}, \begin{cases} 10 = 10 \\ 20 = 20 \end{cases}.$$

Демек, теңдемелер системасы туура чыгарылган.

Жообу: $x = 5$, $y = 2$.

23-*маселе.* $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10 \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу. Кайталанбоочу орундаштыруулардын жана топтоштуруулардын формулаларын пайдаланып төмөнкүлөрдү алабыз жана аларды жөнөкөйлөтөбүз:

$$\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10 \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} : \dfrac{x!}{[x-(y-1)]!} = 10 \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} : \dfrac{x!}{(y-1)![x-(y-1)]!} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} : \dfrac{x!}{(x-y+1)!} = 10 \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} : \dfrac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} \cdot \dfrac{(x-y+1)!}{x!} = 10 \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} \cdot \dfrac{(y-1)!(x-y+1)!}{x!} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-y+1)!}{(x-y)!} = 10 \\ \dfrac{(y-1)!(x-y+1)!}{y!(x-y)!} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-y)!(x-y+1)}{(x-y)!} = 10 \\ \dfrac{(y-1)!(x-y)!(x-y+1)}{(y-1)!y(x-y)!} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=10 \\ \frac{(x-y+1)}{y}=\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=10 \\ 3(x-y+1)=5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=9 \\ 3x-8y=-3. \end{cases}$$

Акыркы алынган теңдемелер системасындагы биринчи теңдеменин эки жагын тең -3кө көбөйтөбүз. Андан ары пайда болгон теңдемелер системасын кошуу методунун жардамында чыгарабыз:

$$\begin{cases} -3x+3y=-27 \\ \ \ 3x-8y=-3. \end{cases}$$

$-5y=-30 \Leftrightarrow y=6.$

$3x-8\cdot 6=-3 \Leftrightarrow 3x=-3+48 \Leftrightarrow 3x=45 \Leftrightarrow x=15.$

$x=15,$

$y=6.$

Теңдемелер системасындагы белгисиздердин ордуна тийешелүү маанилерин коюп аны текшерүүгө болот.

Жообу: $x=5,\ y=2.$

КӨНҮГҮҮЛӨР

72. $X=\{a,b,c,d\}$ көптүгүнүн бардык мүмкүн болгон камтылуучу көптүктөрүн түзгүлө жана аларды эсептегиле.

73. $X=\{a,b,c,d,e\}$ көптүгүнүн элементтеринен эки элементтен, үч элементтен жана төрт элементтен турган камтылуучу көптүктөрдү түзгүлө жана аларды эсептегиле.

74. Эсептегиле:

а) $C_6^4;$ б) $C_9^5;$ в) $C_{12}^7;$ г) $C_{16}^{12};$

д) $C_5^3+C_7^5;$ е) $C_6^3\cdot A_5^3;$ ж) $\frac{C_7^5}{A_6^4};$ з) $\frac{C_6^4\cdot P_4}{A_7^5\cdot C_5^3};$

75. Айдай дүкөндөн кызыл, сары, жашыл жана көк шарларды сатып алды. Эки шардан турган кандай топ түзүүгө болот? Канча топ пайда болду?

76. 7 адамдын ичинен 3 адамдан турган комиссияны канча түрдүү жол менен тандоого болот?

77. Шахмат боюнча турнирге 8 адам катышат. Эгерде ар бир эки адам бирден партия ойношсо, анда турнирде бардыгы болуп канча партия ойнолот?

78. Шахмат боюнча өткөрүлгөн турнирде (ар бир эки адам бирден партия ойногон) 15 партия ойнолгон. Турнирге канча адам катышкан?

79. Класстагы 17 кыздын жана 13 баланын ичинен 3 кыз жана 4 баладан турган өкүлчөлүктү канча түрдүү жол менен тандоого болот?

80. Айланада 5 чекит белгиленген. Ар бир эки чекит кесинди менен туташтырылган. Канча кесинди пайда болду?

81. Тегиздикте 6 чекит белгиленген. Ар бир эки чекит кесинди менен туташтырылган. Канча кесинди пайда болду?

82. Кафедранын 8 мугалими отурумдун алдында бири-бири менен кол алышып учурашышты. Учурашуулардын саны канча?

83. Класста математиканы мыкты билген 7 окуучу бар. Алардын ичинен 2 окуучуну математика боюнча олимпиадага канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

84. Текчедеги 7 китептин ичинен 3 китепти алуу керек. Ал китептерди канча түрдүү жол менен алууга болот?

85. Аскердик бөлүктүн чалгындоо отрядында 12 солдат бар. Алардын ичинен 7сүн канча түрдүү жол менен чалгынга жөнөтүүгө болот?

86. Взводдо 3 сежант эана 30 солдат бар. Кароолдук кызматты өтөө үчүн 1 сержант жана 3 солдаттан турган топту канча түрдүү жол менен түзүүгө болот?

87. Футбол боюнча биринчиликке ойноо үчүн 16 команда катышат. Бул учурда ар бир команда бири-бири менен бирден гана матч ойнойт. Бардыгы канча календардык оюн бар?

88. Группада 25 студент бар. Кечеде дежурлук кылуу үчүн 4 студентти канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

89. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $C_x^2 = 21$; б) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$;

в) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$; г) $A_x^3 + 2C_x^4 = 3A_x^2$;

д) $5 \cdot C_x^3 = C_{x+2}^4$; е) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$;

ж) $C_x^{x-2} + 2x = 9$; з) $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$.

90. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $C_x^3 = \frac{5x(x-3)}{4}$; б) $\frac{C_{x+1}^2}{C_x^3}=6$;

в) $\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = \frac{2}{3}$; г) $C_{x+1}^5 = \frac{3A_x^3}{8}$;

д) $11C_x^3 = 24C_{x+1}^2$; е) $12C_{x+1}^2 = 55A_{x+1}^2$.

91. Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66; \end{cases}$ б) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$

в) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x \\ C_{x-1}^y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 8 \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1{,}6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} A_{5x}^{y-3} : A_{5x}^{y-2} = \frac{1}{7} \\ C_{5x}^{y-2} : C_{5x}^{y-3} = \frac{7}{4}. \end{cases}$ е) $\begin{cases} A_{2x}^{y-2} = 8A_{2x}^{y-3} \\ 3C_{2x}^{y-2} = 8C_{2x}^{y-3}. \end{cases}$

3.5. ТОПТОШТУРУУЛАРДЫН КАСИЕТТЕРИ

C_m^k көрүнүшүндөгү сандардын бир топ кызыктуу касиеттерге ээ. Алардын кээ бирлерине токтололу.

1°. $\forall k, m \in Z_+, 0 \le k \le m$: $C_m^k = C_m^{m-k}$ – симметрия касиети. (5)

Далилдөө. Бул барабардыктын тууралыгын далилдөө үчүн (4) формуланы пайдаланып, анын оң жана сол жактарындагы туюнтмаларды жайылтып жазып чыгалы:

$$C_m^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)![m-(m-k)]!} = \frac{m!}{k!(m-k)!},$$

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Жыйынтыктары дал келгендиктен (5) барабардык туура. Демек, $C_m^{m-k} = C_m^k$ экендиги далилденди.

2°. $\forall k, m \in Z_+, 0 \le k \le m$: $C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$ – Паскалдын касиети. (6)

Далилдөө. Бул барабардыктын тууралыгын далилдөө үчүн анын оң жагын өзгөртүп түзөлү:

$$C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^{k}=\frac{(m-1)!}{(k-1)![m-1-(k-1)]!}+\frac{(m-1)!}{k!(m-1-k)!}=$$
$$=\frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}+\frac{(m-1)!}{k!(m-1-k)!}=\frac{m!k}{k!(m-k)!}+\frac{(m-1)!(m-k)}{k!(m-k)!}=$$
$$=\frac{(m-1)!(k+m-k)}{k!(m-k)!}=\frac{m!}{k!(m-k)!}=C_m^k.$$

Алынган жыйынтык (6) барабардыктын сол жагы менен дал келди, б.а. $C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^{k}$ экендиги келип чыкты. Мына ошентип, 2°-касиеттин тууралыгы далилденди.

$C_m^0=1$ экендигин көрсөтөлү. $0!=1$ деп кабыл алынгандыктан $C_m^0=\frac{m!}{0!m!}=1$ болот. $k=0$ болгон учурда 2°-касиет $C_m^0=C_{m-1}^{-1}+C_{m-1}^{0}$ көрүнүшүнө келет. $C_m^0=C_{m-1}^0=1$ болгондуктан, $C_{m-1}^{-1}=0$ эсептөө керек. $k=m$ болгон учурда да 2°-касиет туура болот. $C_m^m=1$ экендигин көрсөтөлү:

$$C_m^k=C_m^m=\frac{m!}{m!(m-m)!}=\frac{m!}{m!0!}=\frac{1}{0!}=\frac{1}{1}=1.$$

C_{m-1}^{k-1} жана C_{m-1}^{k} туюнтмаларынын маанилери белгилүү болсо, анда 2°-касиет C_m^k санынын маанисин эсептөөгө мүмкүндүк түзөт. Бул касиетти пайдаланып, C_m^k санынын маанилерин $n=0$, $n=1$, $n=2$ ж.б. болгон учурлар үчүн удаалаш эсептөөгө болот. Эсептөөлөрдү үч бурчтук таблица көрүнүшүндө жайгаштырууга болот:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
\end{array}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_m^0 \quad C_m^1 \quad C_m^2 \;\cdots\cdots\cdots\; C_m^{m-1} \quad C_m^m$$

Мында $m+1$ жолчодо катары менен $C_m^0, C_m^1, C_m^2, \ldots C_m^{m-1}, C_m^m$ сандары жазылган. Бул учурда $C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^{k}$. Ар бир C_m^k саны үстүнкү жолчодо турган сол жана оң жактарындагы эки сандын суммасына барабар.

Мына ошентип, көрсөтүлгөн таблицаны эске жеңил тутуп калууга жана топтоштуруунун формуласын пайдаланбастан, анын сандык маанилерин түзүүгө болот.

0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
....	....	...	...	...	...	...	...	...

7-аныктама. Каптал жактарында жалаң бирлер болгон жана бирлерден башка ар кандай сандар, үстүнкү жолчодо жайгашкан сол жана оң жактарындагы эки сандын суммасына барабар болгон сандардан турган үч бурчтук формасындагы чексиз сандык таблица *Паскалдын үч бурчтугу* деп аталат.

3°. $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$ (7)

Далилдөө. Паскалдын үч бурчтугунун $(m+1)$ – жолчосун карайлы. Бул жолчонун ар бир саны бөлүмү 2ге барабар болгон геометриялык прогрессияны түзөт: 1, 2, 4, 8, 16, 32 ж.б. Бул учурда 0-жолчодогу сандардын суммасы $C_0^0 = 1 = 2^0$, 1-жолчодогу сандардын суммасы $C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2^1$, 2-жолчодогу сандардын суммасы $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$, 3-жолчодогу сандардын суммасы $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$ ж.б.у.с. болот. Ушундай талкуулолордун негизинде үч бурчтуктун $(m+1)$ – жолчосундагы сандардын суммасы 2^mге барабар деп жыйынтык чыгарууга болот. Мына ошентип, $\sum_{k=0}^{m} C_m^k = 2^m$ экендиги далилденди.

Көптүктөр теориясынын тилинде бул касиетти башкача далилдөгө болот.

Паскалдын үч бурчтугунун касиеттери.

- Ар бир жолчодогу экинчи сан анын номерине дал келет;
- Ар бир жолчодогу бирден башка ар кандай сандар үстүнкү жолчодо жайгашкан сол жана оң жактарындагы эки сандын суммасына барабар, б.а. $C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$;

- Паскалдын үч бурчтугунун m-жолчосундагы сандардын суммасы 2^m ге барабар, б.а. $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ ... \ + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m$.

Француз математиги Б.Паскалдын (1623-1662) эмгектеринде бул үч бурчтук болгондуктан, ал Паскалдын үч бурчтугу деп аталып калган. Бул тарыхий жактан алып караганда так эмес. Анткени бул таблицаны орто азиялык акын-математик Омар Хаям (1048 -1131) XII кылымда эле билген.

Мектеп математикасынын курсунан төмөнкүлөр белгилүү:

$$(x+y)^0 = 1,$$
$$(x+y)^1 = x + y,$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$
$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

....

Бул формулалар эки мүчөнүн даражаларын эсептөөнүн жекече учурлары болуп эсептелет. Бир мүчөлөрдүн берилген суммаларын жана даражаларынын суммаларын кароо менен кошулуучулардын саны $(m+1)$ ге барабар экендигин байкоого болот. $(x+y)^m$ туюнтмасын эсептөө учурунда кантип кашааны ачууга болот? Бул маселени чечүүгө Ньютондун биномунун формуласы жардам берет.

Бином бул, – бир мүчөлөрдүн суммасы түрүндөгү эки мүчөлөрдүн даражасы.

Ал формуланы жалпы учурда төмөнкүдөй жазууга болот:

$$(x+y)^m = C_m^0 x^m y^0 + C_m^1 x^{m-1} y + C_m^2 x^{m-2} y^2 + \ ... + C_m^k x^{m-k} y^k + $$
$$+ \ ... + C_m^{m-1} x y^{m-1} + C_m^m x^0 y^m. \qquad (8)$$

Бул барабардык Ньютондун биномунун формуласы, ал эми $C_m^0, C_m^1, C_m^2, \ ... \ C_m^{m-k} x^{m-k} y^k, \ ..., \ C_m^{m-1}, \ C_m^m$ сандары биномиалдык коэффициенттер деп аталат. Бул формулада биномдун ажыралмасынын $(k+1)$-мүчөсү – жалпы мүчөсү

$$T_{k+1} = C_m^k x^{m-k} y^k \qquad (9)$$

көрүнүшүндө болот. Бул формуланын жардамында биномдун толук ажыралмасын жазып отурбастан, талап кылынган мүчөсүн табууга болот.

$(x+y)^m$ формуласын орто азиялык математиктер Омар Хаям (1048-1131), Гиас ад-Дин Жемшид аль-Каши (1380-1429) Б.Паскалдар (1623-1662) И.Ньютонго (1642-1720) чейин эле билишкен. Ал эми Ньютон $(x+y)^m$ формуласынын ажыралмасын m дин бөлчөк жана терс маанилери үчүн жалпылаган.

24-маселе. $(x+1)^5$ туюнтмасын Паскалдын үч бурчтугун пайдаланып көп мүчө түрүндө көрсөткүлө.

Чыгаруу. Таблицага ылайык бешинчи даражадагы көп мүчөнүн коэффициенттери 1, 5, 10, 10, 5, 1 сандарына барабар болот. Ошондуктан төмөнкү барабардыкка ээ болобуз:

$$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

25-маселе. $(x+2)^6$ туюнтмасын Ньютондун биномунун формуласынын жардамында көп мүчөгө ажыраткыла.

Чыгаруу. Берилген туюнтманы (8) формуланын жардамында төмөнкүдөй ажыратып жазып алабыз:

$$(x+1)^6 = C_6^0x^62^0 + C_6^1x^52^1 + C_6^2x^42^2 + C_6^3x^32^3 + C_6^4x^22^4 + \\ +C_6^5x^12^5 + C_6^6x^02^6.$$

Эсептөөлөрдү аткарабыз:

$$C_6^0 = \frac{6!}{0!6!} = \frac{1}{1} = 1, \quad C_6^1 = \frac{6!}{1!5!} = \frac{5!\cdot 6}{1\cdot 5!} = 6, \quad C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4!} = 15,$$
$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{6\cdot 3!} = 20, \ C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!\cdot 2} = 15, \ C_6^5 = \frac{6!}{5!1!} = \frac{5!\cdot 6}{5!\cdot 1} = 6,$$
$C_6^6 = \frac{6!}{6!0!} = \frac{1}{1} = 1$. Андан ары бул маанилерди ажыралмадагы коэффициенттердин ордуна коёбуз.

$$(x+1)^6 = x^62^0 + 6x^52^1 + 15x^42^2 + 20x^32^3 + 15x^22^4 + 6x^12^5 + \\ +x^02^6 = x^6 + 6x^52 + 15x^44 + 20x^38 + 15x^216 + 6x^132 + 62 = \\ = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 62.$$

Демек, $(x+1)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 62$.

26-маселе. $(\sqrt{x}+x)^{10}$ биномунун ажыралмасынын 5- жана 9-мүчөлөрүн тапкыла.

Чыгаруу. Ньютондун биномунун ажыралмасынын жалпы мүчөсүнүн (9) формуласы боюнча төмөндө көрсөтүлгөн туюнтмаларды алабыз:

$$T_{k+1} = T_{4+1} = C_{10}^4(\sqrt{x})^6 x^4 = \frac{10!}{4!6!} x^3 x^4 = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{24 \cdot 6!} x^7 = 210x^7.$$

$$T_{k+1} = T_{8+1} = C_{10}^8(\sqrt{x})^2 x^8 = \frac{10!}{8!2!} x x^8 = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2} x^9 = 45x^9.$$

Жообу: $210x^7, 45x^9$.

27-маселе. $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{15}$ биномунун ажыралмасынын 13-мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу. Ньютондун биномунун ажыралмасынын жалпы мүчөсүнүн формуласынын жардамында төмөнкүнү алабыз:

$$T_{k+1} = T_{12+1} = C_{15}^{12}(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt{2})^{12} = \frac{15!}{12!3!}(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt{2})^{12} =$$

$$= \frac{12! \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{12! \cdot 6} \cdot 3 \cdot 2^6 = 13 \cdot 35 \cdot 3 \cdot 2^6 = 39 \cdot 35 \cdot 64 = 87360.$$

Жообу: 87360.

КӨНҮГҮҮЛӨР

92. Төмөнкүлөрдү эсептегиле:
$C_5^0, C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4, C_5^5,\ C_6^0, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6, C_7^0, C_7^1, C_7^2, C_7^3, C_7^4, C_7^5$.

93. Төмөнкүлөрдү эсептегиле:
$C_m^0, C_m^1, C_m^2, C_m^{m-1}, C_m^{m-2}, C_m^{m-3}, C_{100}^1, C_{100}^2, C_{100}^3, C_{100}^{99}, C_{1000}^1, C_{1000}^2, C_{1000}^3, C_{1000}^{999}$.

94. Төмөнкү барабардыктардын тууралыгын далилдегиле:

а) $C_5^3 = C_5^2$; б) $C_6^4 = C_6^2$; в) $C_7^4 = C_7^3$;

г) $C_8^5 = C_7^4 + C_7^5$; д) $C_9^7 = C_8^6 + C_8^7$; е) $C_7^3 = C_6^2 + C_6^3$.

95. $A = \{a, b, c\}$ көптүгүнүн бардык камтылуучу көптүктөрүн түзгүлө жана алардын санын эсептегиле.

96. Ондук эсептөө системасындагы цифралардын көптүгүнүн канча ар түрдүү камтылуучу көптүктөрү бар?

97. Паскалдын үч бурчтугун пайдаланып, анын 8- жана 11-жолчолорун жазгыла.

98. Паскалдын үч бурчтугун пайдаланып C_6^0 $C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5$ жана C_6^6 туюнтмаларынын маанилерин тапкыла.

99. Паскалдын үч бурчтугунун жардамында $(x+1)^6$ жана $(x+y)^6$ туюнтмаларын даражага көтөргүлө.

100. Төмөнкү биномдордун ажыралмаларын жазгыла:

а) $(x+3)^4$; б) $(2x+1)^5$; в) $(2x+3)^4$;

г) $(x+2y)^4$; д) $(x-3)^5$; е) $(3x-2y)^6$.

101. $(3x+y)^6$ биномунун ажыралмасынын ортоңку мүчөсүн тапкыла.

102. $(3x-y)^6$ биномунун ажыралмасынын x^k даражасын камтыган коэффициентин тапкыла:

а) $(x+2)^{10}, k=3$; б) $(2x-1)^8, k=5$.

103. Төмөнкү биномдордун ажыралмаларынын эки ортоңку мүчөсүн тапкыла:

а) $(2x+3)^{10}$; б) $(2x+y)^{15}$; в) $(\sqrt{x}+\frac{1}{x})^{12}$;

г) $(3x+2y)^{13}$; д) $(3x+4y)^9$; е) $(\sqrt{x}+3y)^{11}$.

3.6. m ЭЛЕМЕНТТҮҮ КӨПТҮКТҮН КАМТЫЛУУЧУ КӨПТҮКТӨРҮНҮН САНЫ

Чектүү көптүктүн бардык мүмкүн болгон камтылуучу көптүктөрүнүн санын аныктоо маселесин карайлы.

m элементтүү A көптүгү берилсин. Бул көптүктүн элементтеринен канча камтылуучу көптүк түзүүгө боло тургандыгын аныктайлы. A көптүгүнүн бардык мүмкүн болгон камтылуучу көптүктөрү A көптүгүнүн даражасы деп аталат жана ал $P(A)$ деп белгиленет.

Маселени математикалык индукция методунун жардамында чыгарабыз.

а) A көптүгү бош көптүк, б.а, $A=\emptyset$ болсун. Анда $P(A)=\{\emptyset\}$ болот. Демек, бул учурда A көптүгү бир гана A камтылуучу көптүгүнө ээ болот, б.а. $n(P(A))=1$.

б) $A=\{a\}$ болсун. Анда $P(A)=\{\emptyset,\{a\}\}$ болот. Бул учурда A

көптүгү эки камтылуучу көптүккө ээ болот: $\emptyset$ жана $\{a\}$ (бош көптүк жана көптүктүн өзү), б.а. $n(P(A)) = 2$.

в) $A = \{a, b\}$ болсун. Анда $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, б.а. A көптүгү 4 камтылуучу көптүккө ээ же $n(P(A)) = 4$ болот.

г) $A = \{a, b, c\}$ болсун. Анда $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, б.а. A көптүгү 8 камтылуучу көптүккө ээ же $n(P(A)) = 8$ болот.

Жогоруда каралган жекече учурлардын негизинде m элементтүү A көптүгүнүн бардык мүмкүн болгон камтылуучу көптүктөрүнүн саны 2^mге барабар болот деп корутундулоого болот.

Бул $(m-1)$ элементтүү көптүк үчүн туура болсун деп эсептейли, б.а. көптүктүн бардык мүмкүн болгон камтылуучу көптүктөрүнүн саны 2^{m-1}ге барабар болсун дейли. Берилген көптүктү дагы бир элемент менен толуктайлы. Анда m элементтүү көптүк пайда болот. Бул элементти 2^{m-1} элементтүү көптүктүн ар бир камтылуучу көптүгүнө кошуу менен жаңы m элементтүү көптүктүн дагы ошончо камтылуучу көптүгүн алабыз. Анда m элементтүү көптүктүн бардык мүмкүн болгон камтылуучу көптүктөрү $2^{m-1} + 2^{m-1} = 2^{m-1} \cdot (1+1) = 2^{m-1} \cdot 2 = 2^m$ болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

104. $A = \{a, b, c, d, e\}$ көптүгүнүн бардык камтылуучу көптүктөрүн түзгүлө жана алардын санын эсептегиле.

105. $A = \{a, b, c, d\}$ жана $B = \{x, y, z\}$ көптүктөрүнүн бардык камтылуучу көптүктөрүн түзгүлө, алардын санын эсептегиле жана суммасын тапкыла.

106. Төмөнкү туюнтмалардын маанилерин тапкыла:

а) $2^3 + 2^4 + 2^5$; б) $2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$;

в) $\dfrac{2^4+2^5}{2^6-2^4}$; г) $\dfrac{2^3 \cdot 4^3}{8}$.

107. Залда 3 лампочка бар. Залды жарыктандыруунун канча түрдүү ыкмасы бар (бир эле убакта үчөө тең күйбөгөн учур эске алынат)?

3.7. КАЙТАЛАНУУЧУ ОРУН АЛМАШТЫРУУЛАР

Жогоруда ар түрдүү элементтерден түзүлгөн орундаштырууларды, орун алмаштырууларды жана топтоштурууларды карадык. Иш жүзүндө элементтери кайталануучу орун алмаштырууларга, орундаштырууларга жана топтоштурууларга берилген маселелер көп учурайт. Эгерде элементтердин ордун алмаштырган учурда алардын арасында бирдей элементтерден турган орун алмаштыруулар болуп калса, анда орун алмаштыруулардын саны азаят. Анткени бул учурда кээ бир орун алмаштыруулар дал келип калышат.

Маселен, «ЖАШ» сөзүнүн тамгаларынын ордун алмаштыруу менен 6 ар түрдүү орун алмаштырууларга ээ болобуз:

ЖАШ ЖША
АЖШ АШЖ
ШЖА ШАЖ

Эми «ЖАШ» сөзүнүн ордуна «ЖАА» сөзүн алалы жана көрсөтүлгөн орун алмаштыруулардагы Ш тамгасын А тамгасы менен алмаштырып чыгалы. Анда кээ бир орун алмаштыруулар бирдей болуп калат:

ЖАА ЖАА
АЖА ААЖ
АЖА ААЖ

Мына ошентип, «ЖАА» сөзүнүн тамгаларынан турган ар түрдүү орун алмаштыруулардын саны 6 : 2 = 3 кө барабар болот.

Жалпы учурда маселени төмөнкүдөй түзүүгө болот: $a, b, \ldots, s$ көрүнүшүндөгү k сандагы ар түрдүү элементтер бар. Эгерде a элементи m_1, b элементи m_2 ж.б. s элементи m_k жолу кайталанса, анда бул элементтерден түзүлгөн бардык мүмкүн болгон орун алмаштыруулардын санын аныктоо талап кылынсын.

8-аныктама. Компоненттеринин арасында a элементи m_1, b

элементи m_2 ж.б. s элементи m_k жолу кайталанган $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ узундуктагы кортеж $a,\ b,\ \dots,\ s$ элементтеринен ***кайталануучу орун алмаштыруу*** деп аталат.

Кайталануучу орун алмаштыруулардын саны $P(m_1, \dots, m_k)$ символу менен белгиленет.

5-теорема. a элементи m_1, b элементи m_2 ж.б. s элементи m_k жолу кайталанган $a,\ b,\ \dots,\ s$ элементтеринен кайталануучу орун алмаштыруулардын саны

$$P(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_k)!}{m_1! m_2! \dots m_k!} = \frac{m!}{m_1! m_2! \dots m_k!} \tag{10}$$

формуласы менен эсептелет.

Далилдөө. Эгерде бардык бирдей a элементин $a_1, a_2, \dots, a_k$, бирдей b элементин $b_1, b_2, \dots, b_k$ ж.б. бирдей s элементин $s_1, s_2, \dots, s_k$ деп номерлеп чыксак, андан кийин ар түрдүү номердеги элементтерди эсептесек, анда берилген көптүктөгү элементтердин саны $m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$, ал эми бардык орун алмаштыруулардын саны $(m_1 + m_2 + \dots + m_k)! = m!$ га барабар болот. Эгерде номерлерди алып койсок, анда бири-бирине дал келген орун алмаштыруулар пайда болот. Демек, бул учурда орун алмаштыруулардын саны да азаят. Маселен, төмөнкү орун алмаштырууну карап көрөлү:

$$\underbrace{a, a, \dots, a}_{m_1}\ \underbrace{b, b, \dots, b}_{m_2} \dots \underbrace{s, s, \dots, s}_{m_k}. \tag{11}$$

Мында, биринчи a менен белгиленген элементтер, экинчи b менен белгиленген элементтер, эң акырында s менен белгиленген элементтер жазылган.

Жайгашуу ирети менен айырмаланган a элементтеринен түзүлгөн орун алмаштыруулардын саны $P_{m_1} = m_1!$ га барабар. Жайгашуу ирети менен айырмаланган b элементтеринен түзүлгөн орун алмаштыруулардын саны $P_{m_2} = m_2!$ Эң акырында, бири-биринен жайгашуу ирети менен айырмаланган s элементтеринен түзүлгөн орун алмаштыруулардын саны $P_{m_k} = m_k!$ га барабар.

Бирок, мындай түрдөгү орун алмаштырууларды бири-бирине көз карандысыз түзүүгө болот. Ошондуктан, алардын санын

$m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!$ (көбөйтүндү эрежеси) түрдүү жол менен аныктоого болот.

Ошентип, $m!$ санында ар бир кайталануучу орун алмаштыруу $m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!$ жолу кездешет. Ошондуктан кайталануучу орундаштыруулардын саны

$P(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{P_m}{P_{m_1} \cdot P_{m_2} \cdot ... \cdot P_{m_k}} = \frac{m!}{m_1! m_2! ... m_k!}$ санына барабар болот.

Теорема далилденди.

28-маселе. «Барабар» сөзүнүн тамгаларынан канча түрдүү кайталануучу орун алмаштырууларды түзүүгө болот?

Чыгаруу. Маселеде 7 тамгадан түзүлгөн кайталануучу орун алмаштыруулардын санын табуу талап кылынууда. Мында б тамгасы $m_1 = 2$, а – $m_2 = 3$, р – $m_2 = 2$ жолу кайталанат.

$$P(2,3,2) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210.$$

Мына ошентип, бардык кайталануучу орун алмаштыруулардын саны 210го барабар.

Жообу: 210.

КӨНҮГҮҮЛӨР

108. Эсептегиле:

а) $P(2,5,3)$; б) $P(1,3,4)$; в) $P(2,4,6)$;
г) $P(1,2,4,3)$; д) $P(3,4,3)$; е) $P(1,3,4,3)$.

109. «Математика» сөзүнүн тамгаларынан канча түрдүү кайталануучу орун алмаштырууларды түзүүгө болот?

110. Чоң эне небересине 2 алма жана 5 банан бекитип койду. Ал небересине 7 күндүн ичинде бирден жемиш берет. Жемишти канча түрдүү жол менен берүүгө болот?

111. Окуучунун 2 ручкасы, 4 карандашы жана 1 өчүргүчү бар. Ал бул буюмдарын партанын үстүнө катарга тизди. Бул катарлардын канча түрдүү варианттары болушу мүмкүн?

112. Балыкчы 4 сазань, 3 форель жана 2 карп балыгын кармады.

Ал балыктардын баарын туздап, кургатуу үчүн жипке илип койду. Балыктарды жипке илүүнүн канча түрдүү варианттары бар?

113. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4 цифралары берилген. Бул цифралардын жардамында канча жети орундуу сан түзүүгө болот?

3.8. КАЙТАЛАНУУЧУ ТОПТОШТУРУУЛАР

9-аныктама. k элементтен турган жана ар бири ар түрдүү m типтеги элементтеринен алынган ар кандай топ берилген ар түрдүү m элементинен k элементи **боюнча *кайталануучу топтоштуруу*** деп аталат.

Берилген m элементтен k элементи боюнча ар түрдүү кайталануучу топтоштуруулар кайталанбоочу топтоштуруулар сыяктуу эле бири-биринен ага кирген элементтеринин курамы менен айырмаланат.

m элементтен k элементи боюнча кайталануучу топтоштуруулардын саны $\bar{C}_m^k$ символу менен белгиленет.

Кайталануучу орун алмаштыруулардын санынын $P(m_1, \dots, m_k)$ символу менен белгилене тургандыгы белгилүү.

6-теорема. m элементтен k элементи боюнча кайталануучу топтоштуруулардын саны

$$\bar{C}_m^k = \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!} = C_{m+k-1}^k \qquad (12)$$

формуласы менен эсептелет.

Далилдөө. $a_1, a_2, \dots, a_m$ – m ар түрдүү типтеги элементтер болсун. m элементтен k элементи боюнча ар бир кайталануучу топтоштурууга төмөнкүдөй эреже боюнча түзүлгөн нөлдөрдөн жана бирлерден турган комбинацияны тийешелештикке коёлу:

Берилген топтоштурууга a_1 элементи канча жолу кирсе, ошончо бирлерди, андан кийин бир нөл жазабыз. Биринчи нөлдөн кийин бул топтоштурууга a_2 элементи канча жолу кирсе, ошончо бирлерди, андан кийин дагы бир нөл жазабыз. Экинчи нөлдөн кийин топтоштурууга a_3 элементи канча жолу кирсе, ошончо бирлерди жазабыз ж.б. Берилген топтоштурууга a_m элементи канча жолу кирсе, ошончо бирлерди акыркы $(m-1)$-нөлдөн кийин жазабыз.

Эгерде топтоштурууга m элементтин ичинен кандайдыр бир типтеги элементтери кирбей калса, анда комбинациянын тийешелүү орундарына бирлер жазылбайт, б.а. нөл жок дегенде эки жолу катары менен жазылат. Мына ушундай жол менен тургузулган комбинациялар нөлдөр жана бирлерден турган кайталануучу топтоштуруулар болушат.

Мына ошентип, ар кандай кайталануучу топтоштурууларга 0 элементи $(m-1)$ жолу, ал эми 1 элементи k жолу кайталанган 0 жана 1 элементтеринен турган кайталануучу орун алмаштырууларга тийешелештикке коюлат.

Ошондуктан m элементтен k элементи боюнча ар түрдүү кайталануучу топтоштуруулардын саны ар биринде 0 элементи $(m-1)$ жолу, ал эми 1 элементи k жолу кайталанган 0 жана 1 элементтеринен түзүлгөн ар түрдүү кайталануучу орун алмаштыруулардын санына барабар, б.а.

$$\bar{C}_m^k = P(m-1,k) = \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!} = C_{m+k-1}^k.$$

Теорема далилденди.

29-маселе. Дүкөндө кызыл, кара жана көк түстөгү маркерлер бар. 5 маркерди канча түрдүү жол менен сатып алууга болот?

Чыгаруу. Маркерлерди тандоонун төмөнкүдөй варианттары болушу мүмкүн: 5 кызыл, 5 кара, 5 көк, 4 кызыл+1 кара, 4 кызыл+1 көк, 3 кызыл+1 кара+1көк ж.б.

Ошондуктан маркерлерди сатып алуунун алдында тандоолордун бардык мүмкүн болгон саны 3 элементтен 5 боюнча кайталануучу топтоштуруулардын санына барабар болот:

$$\bar{C}_3^5 = C_{3+5-1}^5 = \frac{(3+5-1)!}{5!(3-1)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21.$$

Жообу: 21 түрдүү жол менен сатып алууга болот.

30-маселе. Буфетте 4 түрдүү самса бар. 8 самсаны канча түрдүү жол менен сатып алууга болот?

Чыгаруу. 4 элементтен 8 элемент боюнча кайталануучу топтоштуруулардын санын табабыз:

$$\bar{C}_4^8 = C_{4+8-1}^8 = \frac{(4+8-1)!}{8!(4-1)!} = \frac{11!}{8!3!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{8!\cdot 6} = 165.$$

Жообу: 165 түрдүү жол менен сатып алууга болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

114. Төмөнкү туюнтмалардын маанилерин тапкыла:

а) $\bar{C}_3^7$; б) $\bar{C}_5^9$; в) $\bar{C}_6^{10}$;

г) $\bar{C}_4^9 + \bar{C}_3^6$; д) $\bar{C}_4^5 - \bar{C}_3^7$; е) $\bar{C}_6^8 \cdot \bar{C}_5^7$.

115. К, А жана Р тамгаларынан эки тамгадан турган канча кайталануучу топтоштурууну түзүүгө болот?

116. Дүкөндүн нан бөлүмүндө ак жана кара бөлкө нан бар. 6 бөлкө нанды канча түрдүү жол менен сатып алууга болот?

117. Доминонун фишкаларын 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 цифраларынан турган 7 элементтен 2 боюнча кайталануучу топтоштуруу катары кароого болот. Бул топтоштуруулардын саны канчага барабар?

118. Дүкөндө балык консервасынын 5 түрү бар. 7 консерваны канча түрдүү жол менен сатып алууга болот?

119. Буфетте пирожкинин 7 түрү бар. 4 пирожкини канча түрдүү жол менен сатып алууга болот?

120. Капчыкта 1 сомдук, 3 сомдук, 5 сомдук жана 10 сомдук жетишерлик сандагы монеталар бар. Капчыктан үч монетаны канча түрдүү жол менен алып чыгууга болот?

121. Почта бөлүмүндө 10 түрдүү открытка бар. 8 открытканы канча түрдүү жол менен сатып алууга болот?

122. Жактарынын узундуктары 8 см, 10 см, 12 см, 14 см маанилерин кабыл алган канча ар түрдүү үч бурчтук бар? Алардын ичинен канчасы түрдүү жактуу, тең капталдуу, тең жактуу?

123. Дүкөндө 9 түрдүү открытка бар. Майрамдык куттуктоолор үчүн 12 открытканы канча түрдүү жол менен сатып алууга болот?

124. Дүкөндө карандаштын 5 түрү бар. 7 карандашты канча түрдүү жол менен сатып алууга болот?

ӨЗҮН-ӨЗҮ КӨЗӨМӨЛДӨӨ ҮЧҮН ТЕСТТИК СУРООЛОР

1-ГЛАВА

1. Көптүктөр төмөнкүлөрдөн турат:

а) катыштардан;
б) амалдардан;
в) айтымдардан;
г) элементтерден.

2. Кандайдыр бир белгилери боюнча бириккен ... тобу көптүк болуп эсептелет.

а) бир тектүү объектилердин;
б) ар түрдүү объектилердин;
в) арифметикалык амалдардын;
г) түшүнүктөрдүн.

3. Көптүктөрдү түзгөн объектилер … деп аталат.

а) элементтери;
б) айтымдар;
в) сүйлөмдөр;
г) предметтер.

4. Көптүк жана анын элементтеринин арасындагы катыш … сөз тизмектери аркылуу туюнтулат.

а) камтылат же камтылбайт;
б) таандык же элементи болот;
в) чоң же барабар;
г) кичине же барабар.

5. Көптүк жана анын элементтеринин арасындагы катыш … сөз тизмектери аркылуу туюнтулат.

а) таандык эмес же элементи болбойт;
б) камтылат же камтылбайт;
в) чоң же барабар;
г) кичине же барабар.

6. «x элементи A көптүгүнө таандык» сүйлөмү … деп жазылат.

а) $x \in A$;

б) $x \notin A$;

в) $x \subset A$;

г) $x \subseteq A$.

7. « x элементи A көптүгүнө таандык эмес» сүйлөмү … деп жазылат.

а) $x \in A$;

б) $x \notin A$;

в) $x \subset A$;

г) $x \subseteq A$.

8. Бир да элементке ээ болбогон көптүк … деп аталат.

а) чектүү көптүк;

б) чексиз көптүк;

в) бош көптүк;

г) бош эмес көптүк.

9. Каалаган элементтин берилген көптүккө … экендигин аныктоо мүмкүн болсо, анда ал көптүктү берилди деп эсептейбиз.

а) таандык же таандык эмес;

б) барабар же барабар эмес;

в) параллель же параллель эмес;

г) перпендикуляр же перпендикуляр эмес.

10. Берилген көптүктүн бардык элементтери гана ээ болгон бул касиет көптүктүн … деп аталат.

а) мүнөздүк касиети;

б) элементи;

в) даражасы;

г) көлөмү.

11. $A = \{x | x \in Z_+, 0 \leq x \leq 4\}$ көптүгүнүн элементтери:

а) $0, 1, 2, 3$;

б) $1, 2, 3$;

в) $0, 1, 2, 3, 4$;

г) $1, 2, 3, 4$.

12. $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ көптүгүнүн мүнөздүк касиети боюнча берилишин көрсөткүлө.

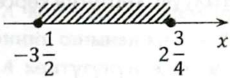
а) $A = \{x | x \in N, 10 < x < 18\}$;
б) $A = \{x | x \in N, 10 \le x < 18\}$;
в) $A = \{x | x \in N, 10 \le x \le 18\}$;
г) $A = \{x | x \in N, 10 < x \le 18\}$.

13. $A = \{x | x \in Z, -3 \le x < 3\}$ көптүгүнүн элементтерин көрсөткүлө.

а) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$;
б) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
в) $A = \{-2, 0, 1, 2\}$;
г) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

14. $A = \{x | x \in R, -3\frac{1}{2} < x < 2\frac{3}{4}\}$ көптүгүнүн координаталык түз сызыкта белгиленишин тапкыла.

а) 

б) 

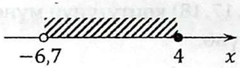
в) 

г) 

15. Эгерде A көптүгүнүн ар бир элементи B көптүгүнүн да элементи болсо, анда A көптүгү B көптүгүнүн … деп аталат.

а) барабар көптүгү;
б) толуктооч көптүгү;
в) универсалдык көптүгү;
г) камтылуучу көптүгү.

16.



координаталык түз сызыгында ... көптүгү сүрөттөлгөн.

а) $\{x|x \in Z, -6{,}7 < x \leq 4\}$;

б) $\{x|x \in R, -6{,}7 < x \leq 4\}$;

в) $\{x|x \in R, -6{,}7 \leq x \leq 4\}$;

г) $\{-6{,}7; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

17. A көптүгү B көптүгүнүн камтылуучу көптүгү … деп белгиленет.

а) $A \subset B$;

б) $A \cap B$;

в) $A \cup B$;

г) $A \neq B$.

18. Камтылуучу көптүк … символу менен белгиленет.

а) $\neq$;

б) $\cap$;

в) $\cup$;

г) $\subset$.

19. $A = \{a, b, c\}$ көптүгүнүн камтылуучу көптүгүн көрсөткүлө:

а) $A_1 = \{a, m\}$;

б) $A_2 = \{a, b\}$;

в) $A_3 = \{b, d\}$;

г) $A_4 = \{b, n\}$.

20. $A = \{a, b, c\}$ көптүгүнүн өздүк эмес көптүктөрүн көрсөткүлө.

а) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$;

б) $\{a, b, c\}, \emptyset$;

в) $\{a\}, \{b\}, \{c\}$;

г) $\{a, b\}, \{b, c\}$.

21. Көптүктөрдү белгилөө үчүн … пайдаланылат.

а) латын алфавитинин баш тамгалары;

б) латын алфавитинин кичине тамгалары;

в) фигуралык кашаалар;

г) жөнөкөй кашаалар.

22. Көптүктөр … мүмкүн.

а) жөнөкөй да, татаал да болушу;

б) чоң да, кичине да элементтүү болушу;

в) көлөмдүү да, көлөмсүз да болушу;

г) чектүү да, чексиз да элементтерге ээ болушу, бир да элементке болбошу.

23. … элементтерден турган көптүктөр барабар көптүктөр деп аталат.

а) бирдей сандагы;

б) бирдей;

в) ар түрдүү

г) ар түрдүү сандагы.

24. Эгерде *A* көптүгү *B* көптүгүнүн камтылуучу көптүгү болсо, анда …

а) *A* көптүгүнүн элементтеринин саны *B* көптүгүнүн элементтеринин санынан чоң болот;

б) *A* көптүгүнүн элементтеринин саны *B* көптүгүнүн элементтеринин санына барабар болот;

в) *A* көптүгүнүн элементтеринин саны *B* көптүгүнүн элементтеринин санынан кичине болот;

г) *A* көптүгүнүн элементтери *B* көптүгүнүн элементтерине эселүү болот.

25. $A = \{a, b, c, d\}$ көптүгүнүн камтылуучу көптүктөрүнүн саны … барабар.

а) 4кө;

б) 8ге;

в) 12ге;

г) 16га.

26. Көптүктөр … болушат.

а) чексиз да, чектүү да;

б) чексиз гана;

в) чектүү гана;

г) бир элементтүү гана.

27. Көптүктөр … менен берилет.

а) координаталык түз сызыктагы айрым чекиттерин сүрөттөө;

б) элементтерин саноо же элементтеринин мүнөздүк касиеттерин көрсөтүү;

в) айрым элементтерин көрсөтүү.

г) координаттык тегиздикте айрым чекиттерин сүрөттөө.

28. Чексиз көптүктөрдү … менен берүүгө болот.

а) элементтерин саноо жолу;

б) элементтеринин мүнөздүк касиетин көрсөтүү;

в) координаталык түз сызыкта айрым чекиттерин сүрөттөө;

г) координаталык тегиздикте айрым чекиттерин сүрөттөө.

29. Чектүү көптүктөрдү … менен берүүгө болот.

а) акыркы элементин көрсөтүү;

б) биринчи элементин көрсөтүү;

в) камтылуучу көптүгүн көрсөтүү;

г) элементтерин саноо жолу же элементтеринин мүнөздүк касиетин көрсөтүү.

30. Кандайдыр бир чекиттердин көптүгү … деп аталат.

а) геометриялык фигура;

б) сынык сызык;

в) кесинди;

г) көп бурчтук.

31. Берилген учурда каралып жаткан камтылуучу көптүктөрдү камтыган көптүк … деп аталат.

а) камтылуучу көптүк;

б) өздүк көптүк;

в) универсалдык көптүк;

г) барабар көптүк.

32. Бир эле учурда *A* жана *B* көптүктөрүнө тийешелүү болгон элементтерден түзүлгөн көптүк *A* жана *B* көптүктөрүнүн … деп аталат.

а) биригүүсү;

б) айырмасы;

в) толуктоочу;

г) кесилиши.

33. A жана B көптүктөрүнүн кесилиши … деп белгиленет.

а) $A \cap B$;

б) $A \cup B$;

в) $A \backslash B$;

г) $A \subset B$.

34. A жана B көптүктөрүнүн кесилиши … символу менен белгиленет.

а) $\subset$;

б) $\cup$;

в) $\backslash$;

г) $\cap$.

35. $A = \{11, 12, 13, 14\}$ жана $B = \{7, 12\}$ көптүктөрүнүн кесилишин тапкыла:

а) $\{11, 7, 12, 13, 14\}$;

б) $\{7\}$;

в) $\{12\}$;

в) $\{7, 12\}$.

36. Эки A жана B көптүктөрүнүн жок дегенде бирине таандык болгон элементтерден түзүлгөн көптүк бул көптүктөрдүн … деп аталат.

а) кесилиши;

б) биригүүсү;

в) айырмасы;

г) толуктоочусу.

37. Көптүктөрдүн биригүүсү амалы … деп белгиленет.

а) $A \cap B$;

б) $A \cup B$;

в) $A \backslash B$;

г) $A \subset B$.

38. Көптүктөрдүн биригүүсү амалы … символу менен белгиленет.

а) $\cap$;

б) $\backslash$;

в) ∪;

г) ⊂.

39. $A = \{11, 12, 13, 14\}$ жана $B = \{7, 12\}$ көптүктөрүнүн биригүүсүн тапкыла:

а) $\{11, 7, 12, 13, 14\}$;

б) $\{7\}$;

в) $\{12\}$;

г) $\{7, 12, \}$.

40. A көптүгүнүн B көптүгүнө кирбеген элементтеринен түзүлгөн көптүк A жана B көптүгүнүн … деп аталат.

а) кесилиши;

б) биригүүсү;

в) айырмасы;

г) толуктоочусу.

41. Көптүктөрдүн кесилишинин аныктамасын көрсөткүлө:

а) $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A$ же $x \in B\}$;

б) $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A$ жана $x \in B\}$;

в) $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \notin A$ же $x \in B\}$

г) $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \notin A$ жана $x \notin B\}$.

42. Көптүктөрдүн биригүүсүнүн аныктамасын көрсөткүлө:

а) $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A$ же $x \in B\}$;

б) $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A$ жана $x \in B\}$;

в) $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \notin A$ же $x \in B\}$

г) $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \notin A$ жана $x \notin B\}$.

43. Көптүктөрдүн айырмасынын аныктамасын көрсөткүлө:

а) $A \backslash B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A$ же $x \in B\}$;

б) $A \backslash B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A$ жана $x \notin B\}$;

в) $A \backslash B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \notin A$ же $x \in B\}$

г) $A \backslash B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \notin A$ жана $x \notin B\}$.

44. Көптүктөрдүн барабардыгынын аныктамасын көрсөткүлө:

а) $A \supset \mathrm{B} \wedge \mathrm{B} \subset A \Rightarrow A \stackrel{\text{def}}{=} B$;

б) $A \subset B \wedge B \supset A \Rightarrow A \stackrel{\text{def}}{=} B$;

в) $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A \stackrel{\text{def}}{=} B$;

г) $A \nsubseteq B \wedge B \nsubseteq A \Rightarrow A \stackrel{\text{def}}{=} B$.

45. A жана B көптүктөрүнүн айырмасы … деп белгиленет.

а) $A \cap B$;

б) $A \cup B$;

в) $A \backslash B$;

г) $A \subset B$.

46. $A = \{5, 8, 10, 12, 14\}$ жана $B = \{7, 8, 12\}$ көптүктөрүнүн айырмасын тапкыла:

а) $\{8, 12,\}$;

б) $\{5, 10, 14\}$;

в) $\{5, 7, 8, 10, 12, 14\}$;

г) $\{7\}$.

47. Эгерде $A \subset U$ болсо, анда $U \backslash A$ айырмасы A көптүгүнүн U универсалдык көптүгүнө чейин … көптүк деп аталат.

а) камтылуучу;

б) кесилишүүчү;

в) толуктооч;

г) биригүүчү.

48. Эгерде $B \subset A$ болсо, анда $A \backslash B$ айырмасы B көптүгүн A көптүгүнө чейин … көптүк деп аталат.

а) толуктооч;

б) кесилишүүчү;

в) биригүүчү;

г) камтуучу.

49. $B \subset A$ болсун. B көптүгүнүн A көптүгүндөгү толуктооч көптүгү ... символу менен белгиленет:

а) B_1;

б) $\overline{U}$;

в) $\bar{A}$;

г) $\bar{B}_A$.

50. U универсалдык көптүгүндөгү A көптүгүнүн толуктооч көптүгү ... символу менен белгиленет.

а) A_1;

б) $\overline{U}$;

в) $\bar{A}$;

г) $\bar{B}_A$.

51. Универсалдык көптүктүн толуктооч көптүгүнүн аныктамасын көрсөткүлө:

а) $A \subset B \Rightarrow \bar{B}_A \stackrel{\text{def}}{=} A \backslash B$;

б) $U \subset A \Rightarrow \bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} U \backslash A$;

в) $A \subset U \Rightarrow \bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} U \backslash A$;

г) $B \subset A \Rightarrow \bar{B}_A \stackrel{\text{def}}{=} A \backslash B$.

52. A көптүгүнүн толуктооч көптүгүнүн аныктамасын көрсөткүлө:

а) $A \subset B \Rightarrow \bar{B}_A \stackrel{\text{def}}{=} A \backslash B$;

б) $U \subset A \Rightarrow \bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} U \backslash A$;

в) $A \subset U \Rightarrow \bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} U \backslash A$;

г) $B \subset A \Rightarrow \bar{B}_A \stackrel{\text{def}}{=} A \backslash B$.

53. Натуралдык сандардын көптүгүн бүтүн сандардын көптүгүнө чейинки толуктооч көптүгүн тапкыла:

а) $\bar{A} = \{x | x \in Z, -\infty < x < 0\}$;

г) $\bar{A} = \{x | x \in Z, -\infty < x \leq 0\}$;

в) $\bar{A} = \{x | x \in Z_+, 0 < x < +\infty\}$;

г) $\bar{A} = \{x | x \in Z_+, 0 \leq x < +\infty\}$.

54. Эгерде $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ жана $B = \{a, f\}$ берилген болсо, анда $\bar{B}_A$ толуктооч көптүгүн тапкыла:

а) $\bar{B}_A = \{b, c, d, e\}$;

б) $\bar{B}_A = \{a, f\}$;

в) $\bar{B}_A = \{a, c, d, e\}$;

г) $\bar{B}_A = \{a, c, b, d\}$;

55. Берилген көптүктү эки-экиден кесилишпеөчү бош эмес көптүктөрдүн биригүүсү көрүнүшүндө көрсөтүү көптүктөрдү ... деп аталат.

а) классификациялоо;

б) кемитүү;

в) кошуу;

г) топтоштуруу.

56. N көптүгүн «5ке бөлүнөт» деген касиет боюнча классификациялагыла:

а) N_1 – «5ке бөлүнүүчү натуралдык сандардын көптүгү», $\overline{N}_1$– «бардык натуралдык сандардын көптүгү»;

б) N_1 – «5ке бөлүнүүчү натуралдык сандардын көптүгү», $\overline{N}_1$ – «жуп натуралдык сандардын көптүгү»;

в) N_1 – «5ке бөлүнүүчү натуралдык сандардын көптүгү», $\overline{N}_1$ – «так натуралдык сандардын көптүгү»;

г) N_1 – «5ке бөлүнүүчү натуралдык сандардын көптүгү», $\overline{N}_1$ – «5ке бөлүнбөөчү натуралдык сандардын көптүгү».

57. X көптүгүн классификациялоо төмөнкүдөй шарттар менен аныкталат:

а) 1. $X_i = \emptyset\ (i = \overline{1,n})$;
2. $X_i \cup X_j = \emptyset\ (i,j = \overline{1,n}, i \neq j)$;
3. $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = X$.

б) 1. $X_i \neq \emptyset\ (i = \overline{1,n})$;
2. $X_i \cap X_j = \emptyset\ (i,j = \overline{1,n}, i \neq j)$;
3. $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = X$.

в) 1. $X_i = \emptyset\ (i = \overline{1,n})$;
2. $X_i \cup X_j = \emptyset\ (i,j = \overline{1,n}, i \neq j)$;
3. $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = X$.

г) 1. $X_i \neq \emptyset\ (i = \overline{1,n})$;
2. $X_i \cap X_j = \emptyset\ (i,j = \overline{1,n}, i \neq j)$;
3. $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = X$.

58. Кандайдыр бир тартипте жайланышкан эки элемент .. деп аталат.

а) компонент;
б) элемент;
в) үчтүк;
г) түгөй.

59. Эгерде $\langle a, b\rangle$ жана $\langle c, d\rangle$ түгөйлөрүнүн тийешелүү компоненттери барабар болсо, анда алар ... түгөйлөр деп аталат.

а) окшош;
б) бирдей;
в) барабар;

г) иреттелген.

60. Кандайдыр бир тартипте жайланышкан n элемент иреттелген … деп аталат.

а) кортеж;

б) компонент;

в) түгөй;

г) декарттык көбөйтүндү.

61. Кортеж ... көрүнүшүндө белгиленет.

а) $x_1, x_2, \dots, x_n$;

б) $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;

в) $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$;

г) $[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

62. $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ кортежинин узундугу ... барабар.

а) k га;

б) x ке;

в) 3кө;

г) n ге.

63. $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ кортежинин компоненттерин көрсөткүлө.

а) $x_1, x_2, \dots, x_n$;

б) n;

в) x_n;

г) x_1.

64. Эгерде $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ жана $\langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ кортеждери бирдей узундукта жана тийешелүү компоненттери барабар болсо, анда ал кортеждер ... деп аталат.

а) окшош;

б) бирдей;

в) барабар;

г) иреттелген.

65. Биринчи компоненти X, ал эми экинчи компоненти Y көптүгүнө таандык болгон бардык түгөйлөрдүн көптүгү X жана Y көптүктөрүнүн ... деп аталат.

а) декарттык көбөйтүндүсү;

б) айырмасы;

в) суммасы;

г) тийиндиси.

66. X жана Y көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсү ... деп белгиленет.

а) $X \cap Y$;

б) $X \cup Y$;

в) $X \backslash Y$;

г) $X \times Y$.

67. X жана Y көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсүн көрсөткүлө:

а) $X \times Y \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle | x \in X \text{ жана } y \in Y\}$;

б) $X \times Y \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle | x \in X \text{ же } y \in Y\}$;

в) $X \times Y \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle | x \notin X \text{ жана } y \notin Y\}$;

г) $X \times Y \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle | x \notin X \text{ же } y \notin Y\}$.

68. $X = \{a, b, c, d\}$ жана $Y = \{x, y\}$ көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсүн тапкыла:

а) $X \times Y = \{\langle a, x\rangle, \langle a, y\rangle, \langle c, x\rangle, \langle d, y\rangle\}$;

б) $X \times Y = \{\langle x, a\rangle, \langle x, y\rangle, \langle x, c\rangle, \langle x, d\rangle, \langle y, a\rangle, \langle y, b\rangle, \langle y, c\rangle, \langle y, d\rangle\}$;

в) $X \times Y = \{\langle a, x\rangle, \langle a, y\rangle, \langle b, x\rangle, \langle b, y\rangle, \langle c, x\rangle, \langle c, y\rangle, \langle d, x\rangle, \langle d, y\rangle\}$;

г) $X \times Y = \emptyset$.

69. Биринчи компоненти A_1, экинчи компоненти A_2, ж.б. n-компоненти A_n көптүгүнө таандык болгон n узундуктагы бардык мүмкүн болгон кортеждер $A_1, A_2, \dots, A_n$ көптүктөрүнүн … деп аталат.

а) декарттык көбөйтүндүсү;

б) суммасы;

в) айырмасы;

г) тийиндиси.

70. $A_1, A_2, \dots, A_n$ көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсү ... деп белгиленет.

а) $A_{n-2} \times A_{n-1} \times A_n$;

б) $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$;

в) $A_{n-1} \times A_n$;

г) $A_1 \times A_n$.

71. X жана Y көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсү ... символу менен белгиленет.

а) $\cap$;

б) $\times$;

в) $\setminus$;

г) $\cup$.

72. Көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсү коммутативдүү эмес:

а) $A \times B = B \times A$;

б) $A \times B \neq B^2 \times A^2$;

в) $A \times B \neq B \times A$

г) $(A \times B)^2 \neq A^2 \times B^2$.

73. Натуралдык сандардын көптүгү ... символу менен белгиленет.

а) N;

б) Z;

в) Z_+;

г) Z_-.

74. Бүтүн сандардын көптүгү ... символу менен белгиленет.

а) N;

б) Z;

в) Z_+;

г) Z_-.

75. Терс эмес бүтүн сандардын көптүгү ... символу менен белгиленет.

а) N;

б) Z;

в) Z_+;

г) Z_-.

2-ГЛАВА

76. Чектүү көптүктөрдүн кандайдыр бир шарттарды канааттандырган камтылуучу көптүктөрүнүн жана иреттелген көптүктөрдүн санын аныктоого берилген маселелер … деп аталат.

а) алгебралык маселелер;
б) арифметикалык маселелер;
в) логикалык маселелер;
г) комбинаторикалык маселелер.

77. Берилген эрежелерге ылайык кандайдыр бир чектүү көптүктүн элементтерин тандоо, жайгаштыруу жана аларды эсептөө маселесин чечүүгө арналган математиканын бөлүмү ... деп аталат.

а) логика;
б) арифметика;
в) комбинаторика;
г) геометрия.

78. «Комбинаторика» сөзү латындын «combinare» сөзүнөн алынган жана ... дегенди билдирет.

а) «бириктирүү», «айкалыштыруу»;
б) «айырмалоо», «ажыратуу»;
в) «бөлүштүрүү»;
г) «жайгаштыруу».

79. Кандайдыр бир объектилерден түзүлгөн топ ... деп аталат.

а) комбинаторика;
б) комбинаторикалык маселелер;
в) комбинация;
г) көптүк.

80. Комбинаториканын негизги маселеси .... санын табуу болуп эсептелет.

а) тегиздиктеги геометриялык фигуралардын;
б) берилген объектилерден түзүлгөн комбинациялардын мүмкүн болгон;
в) чыныгы сандардын көптүгүндө аткарылуучу арифметикалык амалдардын;
г) натуралдык сандардын көптүгүндө аткарылуучу арифметикалык амалдардын.

81. Комбинаториканын өнүгүшүнө ири салым кошкон окумуштуулар:

а) Г. Лейбниц, Я. Бернулли, Л. Эйлер;

б) Архимед, Евклид;

в) Д. Гильберт, Р. Декарт;

г) Пифагор, М. аль-Хорезм.

82. Эгерде $A \cap B = \emptyset$ болсо, анда $A \cup B$ биригүүсүндөгү элементтердин саны ... формуласы менен эсептелет.

а) $n(A \cup B) = n(A) \cdot n(B)$;

б) $n(A \cup B) = n(A) - n(B) + n(A \cap B)$;

в) $n(A \cup B) = n(A) - n(B)$;

г) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

83. Эгерде $A \cap B \neq \emptyset$ болсо, анда $A \cup B$ биригүүсүндөгү элементтердин саны ... формуласы менен эсептелет.

а) $n(A \cup B) = n(A) \cdot n(B) + n(A \cap B)$;

б) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;

в) $n(A \cup B) = n(A) - n(B) + n(A \cap B)$;

г) $n(A \cup B) = n(A) : n(B) - n(A \cap B)$.

84. $A \cap B = \emptyset$ учур үчүн сумма эрежесин көрсөткүлө.

а) $n(A \cup B) = n(A) \cdot n(B)$;

б) $n(A \cup B) = n(A) - n(B) + n(A \cap B)$;

в) $n(A \cup B) = n(A) - n(B)$;

г) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

85. $A \cap B \neq \emptyset$ учур үчүн сумма эрежесин көрсөткүлө.

а) $n(A \cup B) = n(A) \cdot n(B) + n(A \cap B)$;

б) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;

в) $n(A \cup B) = n(A) - n(B) + n(A \cap B)$;

г) $n(A \cup B) = n(A) : n(B) - n(A \cap B)$.

86. Эгерде a элементин m түрдүү жол менен, ал эми b элементин k түрдүү жол менен тандап алууга мүмкүн болсо, анда же a же b элементин ... түрдүү жол менен тандап алууга болот.

а) mk;

б) $m - k$;

в) $m + k$;

г) $m:k$.

87. Сумма эрежесинин жардамында ... элементтеринин саны табылат.

а) көптүктөрдүн кесилишиндеги;

б) кесилишпеген көптүктөрдүн биригүүсүндөгү;

в) толуктооч көптүктөрдүн;

г) көптүктөрдүн айырмасындагы.

88. Сумма эрежесинин жардамында ... элементтеринин саны табылат.

а) көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсүндөгү;

б) көптүктөрдүн айырмасындагы;

в) толуктооч көптүктөрдүн;

г) кесилишкен көптүктөрдүн биригүүсүндөгү.

89. Эки көптүктүн декарттык көбөйтүндүсүндөгү элементтердин саны ... формуласы менен эсептелет.

а) $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$;

б) $n(A \times B) = n(A) + n(B)$;

в) $n(A \times B) = n(A) - n(B)$;

г) $n(A \times B) = n(A) : n(B)$.

90. $A_1, A_2, \dots, A_m$ көптүктөрүнүн декарттык көбөйтүндүсүндөгү элементтердин саны ... формуласы менен эсептелет.

а) $n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m) = n(A_1) - n(A_2) - \dots - n(A_m)$;

б) $n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_m)$;

в) $n(A_1 \times A_m) = n(A_1) \cdot n(A_m)$;

г) $n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \dots \cdot n(A_m)$.

91. Көбөйтүндү эрежесинин жардамында ... элементтеринин саны табылат.

а) көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсүндөгү;

б) көптүктөрдүн айырмасындагы;

в) толуктооч көптүктөрдүн;

г) көптүктөрдүн биригүүсүндөгү.

92. Эгерде a элементин m түрдүү жол менен жана ар бир мындай тандоодон кийин b элементин k түрдүү жол менен тандап алууга мүмкүн болсо, анда $\langle a, b\rangle$ иреттелген түгөйүн ... түрдүү жол менен тандап алууга болот.

а) $m{:}\,k$;

б) $m-k$;

в) $m+k$;

г) $m\cdot k$.

93. 2, 3 жана 4 цифраларынын жардамында канча эки орундуу сан түзүүгө болот?

а) 9;

б) 6;

в) 8;

г) 12.

3-ГЛАВА

94. m элементтүү көптүктүн элементтеринен түзүлгөн k узундуктагы кортеждер m элементтен k боюнча ... деп аталат.

а) декарттык көбөйтүндү;

б) кайталануучу орундаштыруу;

в) орун алмаштыруу;

г) көбөйтүндү эрежеси.

95. m элементтен k боюнча бардык мүмкүн болгон кайталануучу орундаштыруулардын саны ... символу менен белгиленет.

а) A_m^k;

б) A_k^m;

в) $\bar{A}_m^k$;

г) $\bar{A}_k^m$.

96. m элементтен k боюнча кайталануучу орундаштыруулардын саны ... формуласы менен эсептелет.

а) $A_m^k = k^m$;

б) $A_k^m = m+k$;

в) $\bar{A}_m^k = mk$;

г) $\bar{A}_k^m = m^k$.

97. 6 цифранын жардамында канча 3 орундуу сан түзүүгө болот?

а) 216;

б) 18;

в) 729;

г) 9.

98. $\bar{A}_5^3$ туюнтмасынын маанисин эсептегиле.

а) 27;

б) 125;

в) 8;

г) 15.

99. $\bar{A}_4^3 + \bar{A}_3^2$ туюнтмасын ын маанисин эсептегиле.

а) 89;

б) 18;

в) 73;

г) 96.

100. Эгерде A көптүгүнүн элементтери кандайдыр бир жол менен иреттелген болсо, анда ал ... көптүк деп аталат.

а) чектелген;

б) иреттелбеген;

в) чектелбеген;

г) иреттелген.

101. Бири-биринен элементтеринин жайгашуу тартиби менен гана айырмаланган иреттелген m элементтүү көптүк m элементтен ... деп аталат.

а) кайталанбоочу орундаштыруу;

б) кайталануучу орундаштыруу;

в) иреттелген көптүк;

г) кайталанбоочу орун алмаштыруу.

102. $A_{x+1}^2 = 20$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 4;

б) (4, -5);

в) (-4, 5);

г) 5.

103. ... m элементтүү көптүк m элементтен кайталанбоочу орун алмаштыруу деп аталат.

а) m элементтүү көптүктүн элементтеринен түзүлгөн k узундуктагы кортеждер;

б) Бири-биринен жок дегенде бир элементи менен айырмаланган;

в) Бири-биринен элементтеринин жайгашуу тартиби менен гана айырмаланган иреттелген;

г) m элементтүү көптүктүн каалагандай иреттелген k элементтүү камтылуучу көптүгү.

104. m элементтен орун алмаштыруулардын саны ... символу менен белгиленет.

а) P_m;

б) $\bar{P}_m$;

в) P^m;

г) $\bar{P}^m$.

105. m элементтен турган көптүктүн ар түрдүү орун алмаштырууларынын саны ... формуласы менен эсептелет.

а) $P_m = m^2$;

б) $P_m = m!$;

в) $P^m = 2^m$;

г) $\bar{P}^m = m^m$.

106. $m! = \dots$.

а) $m + (m-1) + (m-2) + \dots + 2 + 1$;

б) m^m;

в) $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$;

г) 2^m.

107. $\frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!}$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө.

а) $\frac{m+3}{(m+2)!}$;

б) $\frac{(m+1)!}{(m+2)!}$;

в) $\frac{1}{(m+2)!}$;

г) $\frac{m+1}{(m+2)!(m+1)!}$.

108. Жума күнгө 4 ар түрдүү сабак пландалган: кыргыз тили, математика, мекен таануу жана сүрөт. Бул күнгө сабактын жадыбалын канча түрдүү жол менен түзүүгө болот?

а) 16;

б) 8;

в) 64;

г) 24.

109. 6! туюнтмасын эсептегиле.

а) 720;

б) 36;

в) 32;

г) 600.

110. $6! - 5!$ туюнтмасын эсептегиле.

а) 720;

б) 600;

в) 11;

г) 620.

111. m элементтүү көптүктүн каалагандай иреттелген k элементтүү камтылуучу көптүгү $(m \le k)$ m элементтен k боюнча ... деп аталат.

а) кайталанбоочу орун алмаштыруу;

б) кайталануучу орун алмаштыруу;

в) кайталанбоочу орундаштыруу;

г) кайталануучу орундаштыруу.

112. ... m элементтен k боюнча кайталанбоочу орундаштыруу деп аталат.

а) m элементтүү көптүктүн элементтеринен түзүлгөн k узундуктагы кортеждер;

б) Бири-биринен жок дегенде бир элементи менен айырмаланган;

в) Бири-биринен элементтеринин жайгашуу тартиби менен гана айырмаланган иреттелген;

г) m элементтүү көптүктүн каалагандай иреттелген k элементтүү камтылуучу көптүгү.

113. m элементтен k боюнча кайталанбоочу орундаштыруулардын саны ... символу менен белгиленет

а) $\bar{A}_k^m$;

б) A_k^m;

в) $\bar{A}_m^k$;

г) A_m^k.

114. m элементтен k боюнча кайталанбоочу орундаштыруулардын саны формуласы менен эсептелет.

а) $A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$;

б) $A_m^k = \frac{(m-k)!}{m!}$;

в) $A_k^m = \frac{m!}{(m-k)!}$;

г) $A_k^m = \frac{m!}{(m-k)!}$.

115. $0! = \ldots$.

а) 0;

б) 1

в) 2;

г) 3.

116. A_5^2 туюнтмасын эсептегиле.

а) 18;

б) 10;

в) 20;

г) 24.

117. 1, 2, 3, 4, цифраларын бирден гана жолу пайдаланып, канча эки орундуу сан түзүүгө болот?

а) 6;

б) 8;

в) 10;

г) 12.

118. $A_x^5 = \ldots$.

а) $\frac{x!}{(x-5)!}$;

б) $\frac{x!}{5!}$;

в) $\frac{x!}{(5-x)!}$;

г) $\frac{(x-5)!}{x!}$.

119. m элементтүү көптүктүн бири-биринен жок дегенде бир элементи менен айырмаланган каалагандай k элементтүү камтылуучу көптүгү ($m \leq k$) m элементтен k боюнча ... деп аталат.

а) кайталанбоочу орун алмаштыруу;

б) кайталанбоочу топтоштуруу;

в) кайталанбоочу орундаштыруу;

г) кайталануучу орундаштыруу.

120. ... m элементтен k боюнча кайталанбоочу топтоштуруу деп аталат.

а) m элементтүү көптүктүн элементтеринен түзүлгөн k узундуктагы кортеждер;

б) m элементтүү көптүктүн бири-биринен жок дегенде бир элементи менен айырмаланган каалагандай k элементтүү камтылуучу көптүгү;

в) Бири-биринен элементтеринин жайгашуу тартиби менен гана айырмаланган иреттелген;

г) m элементтүү көптүктүн каалагандай иреттелген k элементтүү камтылуучу көптүгү.

121. m элементтен k боюнча кайталанбоочу топтоштуруулардын саны ... символу менен белгиленет

а) $\bar{C}_k^m$;

б) C_k^m;

в) C_m^k;

г) $\bar{C}_m^k$.

122. m элементтен k боюнча кайталанбоочу топтоштуруулардын саны ... формуласы менен эсептелет.

а) $C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$;

б) $C_m^k = \frac{k!(m-k)!}{m!}$;

в) $C_m^k = \frac{k!m!}{(m-k)!}$;

г) $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$.

123. C_5^2 туюнтмасын эсептегиле.

а) 10;

б) 12;

в) 20;

г) 60.

124. 6 адамдын ичинен 4 адамдан турган комиссияны канча түрдүү жол менен тандоого болот?

а) 6;

б) 15;

в) 20;

г) 12.

125. $C_x^5 =$ ....

а) $\frac{5!x!}{(x-5)!}$;

б) $\frac{x!}{(x-5)!}$;

в) $\frac{x!}{5!(x-x)!}$;

г) $\frac{5!(x-5)!}{x!}$.

126. Оруңдаштыруулардын, орун алмаштыруулардын жана топтоштуруулардын сандарын эсептөөнүн формулаларын байланыштырган формуланы көрсөткүлө.

а) $C_m^k = \frac{P_m}{A_m^k}$;

б) $C_m^k = \frac{A_m^k}{P_m}$;

в) $C_m^k = \frac{\bar{A}_m^k}{P_m}$;

г) $C_m^k = \frac{A_k^m}{P_m}$.

127. $C_x^{x-1} \cdot (x-1) = 30$ теңдемесин чыгаргыла.

а) 6;

б) $-5, 6$;

в) -5;

г) 30.

128. Компоненттеринин арасында a элементи m_1, b элементи m_2 ж.б. s элементи m_k жолу кайталанган $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ узундуктагы кортеж $a, b, \ldots, s$ элементтеринен ... деп аталат.

а) топтоштуруу;

б) кайталануучу орундаштыруу;

в) орун алмаштыруу;

г) кайталануучу орун алмаштыруу.

129. Кайталануучу орун алмаштыруулардын саны ... символу менен белгиленет.

а) $P(m_1, \ldots, m_k)$;

б) $\bar{P}_m$;

в) P_m;

г) $\bar{P}^m$.

130. a элементи m_1, b элементи m_2 ж.б. s элементи m_k жолу кайталанган $a, b, \ldots, s$ элементтеринен кайталануучу орун алмаштыруулардын саны ... формуласы менен эсептелет.

а) $P(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{m!}{m_1! + m_2! + \ldots + m_k!}$;

б) $P(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{m_1! m_2! \ldots m_k!}{m!}$;

в) $P(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{m!}{m_1! m_2! \ldots m_k!}$;

г) $P(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{m_1! + m_2! + \ldots + m_k!}{m!}$.

131. ... Паскалдын үч бурчтугунун жардамында эсептелет.

а) Чектүү көптүктөрдүн камтылуучу көптүктөрүнүн саны ...;

б) Эки мүчөнүн суммасын же айырмасын даражага көтөрүүдө кошулуучулардын коэффициенттери ...;

в) Чектүү көптүктөгү орун алмаштыруулардын саны ...;

г) Көптүктөрдүн декарттык көбөйтүндүсүндөгү кортеждердин саны ... .

132. $P(1,5,3)$ туюнтмасын эсептегиле.

а) 252;

б) 324;

в) 648;

г) 720.

133. Ньютондун биномун көрсөткүлө:

а) $(x+y)^m = C_m^1 x^1 y^0 + C_m^1 x^{m-1} y + C_m^2 x^{m-2} y^2 + \dots + C_m^1 x^0 y^0$;

б) $(x+y)^m = C_m^2 x^m y^1 + C_m^1 x^{m-1} y + C_m^2 x^{m-2} y^2 + \dots + C_m^{m-1} x^2 y^m$;

в) $(x+y)^m = C_m^4 x^m y^4 + C_m^5 x^{m-4} y + C_m^2 x^{m-2} y^2 + \dots + C_m^m x^0 y^m$;

г) $(x+y)^m = C_m^0 x^m y^0 + C_m^1 x^{m-1} y + C_m^2 x^{m-2} y^2 + \dots + C_m^m x^0 y^m$.

134. Ньютондун биномунун жалпы мүчөсүн көрсөткүлө:

а) $T_{k+1} = C_m^k x^{m-k} y^k$;

б) $T_k = C_m^{k+1} x^{m-k} y^k$;

в) $T_{k-1} = C_m^{k-1} x^{m-k} y^k$;

г) $T_m = C_m^k x^{m-k} y^k$.

135. Ньютондун биномунун коэффициенттеринин суммасын көрсөткүлө.

а) $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 1$;

б) $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m$;

в) $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 3^m$;

г) $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 4^m$.

136. $(x+y)^5$ биномунун ажыралмасын көрсөткүлө.

а) $(x+y)^5 = 3xy + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^2$;

б) $(x+y)^5 = 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 4xy^5$;

в) $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$;

г) $(x+y)^5 = 4x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 4y^5$.

137. k элементтен турган жана ар бири ар түрдүү m типтеги элементтеринен алынган ар кандай топ берилген m ар түрдүү элементинен k элементи боюнча ... деп аталат.

а) кайталануучу орундаштыруу;

б) кайталануучу орун алмаштыруу;

в) кайталанбоочу топтоштуруу;

г) кайталануучу топтоштуруу.

138. Кайталануучу топтоштуруулардын санын көрсөткүлө.

а) $\bar{C}_m^k = \dfrac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!} = C_{m+k-1}^k$;

б) $\bar{C}_m^k = \dfrac{(m+k+1)!}{k!(m-1)!} = C_{m+k+1}^{k+1}$;

в) $\bar{C}_m^k = \dfrac{(m+k-1)!}{k!(m+1)!} = C_{m-k-1}^k$;

г) $\bar{C}_m^k = \dfrac{(m+k+1)!}{k!(m+1)!} = C_{m-k+1}^{k+1}$.

139. $\bar{C}_4^7 + \bar{C}_3^5$ туюнтмасынын маанисин тапкыла.

а) 120;

б) 141;

в) 21;

г) 99.

140. $(x+y)^6$ биномунун 5-мүчөсүн тапкыла.

а) $T_{4+1} = 20x^2y^4$;

б) $T_{4+1} = 15x^2y^4$;

в) $T_{4+1} = 10x^2y^4$;

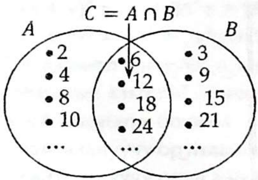
г) $T_{4+1} = 6x^2y^5$.

ЖООПТОР ЖАНА КӨРСӨТМӨЛӨР

1-ГЛАВА

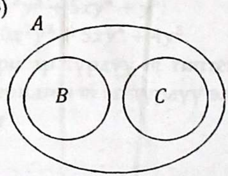
3. а) туура; б) туура эмес; в) туура; г) туура эмес; д) туура; е) туура эмес. **4.** а) $3 \in N$, $16 \in N$, $96 \in N$, $264 \in N$; б) $0 \in Z$, $3 \in Z$, $-8 \in Z$, $16 \in Z$, $96 \in Z$, $264 \in Z$; в) $0 \in Q$, $3 \in Q$, $-8 \in Q$, $5{,}4 \in Q$, $16 \in \in Q$, $96 \in Q$, $264 \in Q$; г) $0 \in R$, $3 \in R$, $-8 \in R$, $5{,}4 \in R$, $16 \in R$, $96 \in R$, $264 \in R$, $\sqrt{3} \in R$. **5.** $A = \{м,\ а,\ т,\ е,\ и,\ к\}$ жана $B = \{4, 5, 8, 9, 2\}$. **6.** а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; б) $B = \{a, b, c, d\}$. **7.** а) $A = \{51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59\}$; б) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$. **8.** $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, $C = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$. **9.** а) $A = \{x | x = 11n, n \in N, 1 \le n \le 9\}$; б) $A = \{x | x = 2n, n \in N, 10 \le n \le 14\}$; в) $C = \{x | x$ – кыргыз алфавитинин үндүү тамгалары$\}$. **11.** а) $\{x | x \in R, -2 < x < 3\}$; б) $\{x | x \in R, x > 1\}$; в) $\{x | x \in R, -1 < < x \le 4\}$; е) $\{x | x \in R, -4 \le x < 5\}$. **12.** а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ – көптүктүн элементтеринин саноо ыкмасы менен берилиши, $A = \{x | x \in \in N, x < 9\}$ – көптүктүн элементтеринин мүнөздүк касиети менен берилиши; б) $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ – көптүктүн элементтеринин саноо ыкмасы менен берилиши, $B = \{x | x \in N, 4 < x \le 10\}$ – көптүктүн элементтеринин мүнөздүк касиети менен берилиши. **16.** $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\emptyset$; Баары: $2^4 = 16$.

17. а)



39-сүрөт

б)



40-сүрөт

18.

41-сүрөт

21. а) $A \cap B = \{a, c, f\}$; б) $B \subset A \Rightarrow A \cap B = \{x | x \in N, x \leq 10\} = B$; в) $A \cap B = \{x | x \in N, 3 < x \leq 10\}$; г) $A \cap B = \{12, 18\}$; д) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = \{x | x \in N\} = A$. **27.** а) $A \cup B = \{a, c, d, f, m, x, y\}$; б) $B \subset A \Rightarrow A \cup B = \{x | x \in N, x \leq 15\} = A$; в) $A \cup B = \{x | x \in N, 4 \leq x \leq 10\} = B$. **31.** а) $x > 1$; б) $-2 \leq x \leq 4$; в) $\emptyset$; г) $4 < x \leq 8$. **33.** а) $A \backslash B = \{2, 4, 6, 7\}$; б) $A \backslash B = \{2\}$; в) $A \backslash B = A$; г) $A \backslash B = \{1, 2, 5, 7, 8\}$. **35.** а) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$. Мында $A \cap B = \emptyset$ жана $A \cup B = X$ болгондуктан X көптүгү класстарга ажырайт. **39.** а) $A \times B = \{\langle a, x\rangle, \langle a, y\rangle, \langle a, z\rangle, \langle b, x\rangle, \langle b, y\rangle, \langle b, z\rangle, \langle c, x\rangle, \langle c, y\rangle, \langle c, z\rangle, \langle d, x\rangle, \langle d, y\rangle, \langle d, z\rangle, \langle e, x\rangle, \langle e, y\rangle, \langle e, z\rangle\}$. б) $A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$. **40.** $A \times B = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 5,5\rangle\}$; 4 цифрасы менен башталган эки орундуу сандар: 41, 42, 43, 44, 45.

2-ГЛАВА

1. $m + k = 10$. **2.** 11. **3.** 13. **4.** 101. **5.** 11 окуучу математика ийримине, 8 окуучу музыка ийримине катышат, $n(U) \backslash [n(A \cup B)] = 2$ окуучу бир да ийримге катышпайт. **6.** $n(A \cap B) = 34$ окуучу эки тилди тең үйрөнөт. **7.** 8. **8.** 26 студент бирден гана оюндун түрүн ойнойт, 12 студент эки оюнга тең катышпайт. **9.** 30. **10.** 63 студент бир гана тилди үйрөнөт, 20 студент бир да тилди үйрөнбөйт. **12.** $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 4 = 12$ түрдүү жол менен барууга болот. **13.** Баары $n(A \times A) = 4 \cdot 4 = 16$ эки орундуу сан, цифралары кайталанбаган $n(A_1 \times A_2) = 4 \cdot 3 = 12$ эки орундуу сан түзүүгө болот. **14.** Баары 25 эки орундуу сан, цифралары кайталанбаган 20 эки орундуу сан түзүүгө болот. **15.** Баары 64 үч орундуу сан, цифралары кайталанбаган 24 үч орундуу сан түзүүгө болот. Цифралары кайталанган үч орундуу сандардын эң чоңу 666, эң кичинеси 222, алардын айырмасы: $666 - 222 = 444$, цифралары кайталанбаган үч орундуу сандардын эң чоңу 653, эң кичинеси 235, алардын айырмасы: $653 - 235 = 418$. **16.** Баары 256 төрт орундуу сан, цифралары кайталанбаган 24 төрт орундуу сан түзүүгө болот. **17.** $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ түрдүү жол менен жадыбал түзүүгө болот. **18.** 6720. **19.** Баары 25, а) 5; б) 5; в) 5; г) 1; д) 10. **20.** а) цифралары кайталануучу $n(A_1 \times A_2 \times A_2 \times A_2) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_2) \cdot n(A_2) = n(A_1) \cdot [n(A_2)]^3 = 6 \cdot 7^3 = 2058$ төрт орундуу сан; б) цифралары кайталанбаган $n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot n(A_4) = 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$ төрт орундуу сан; в) мында 1, 3, 5 так цифралар болгондуктан, алардан $n(A_1 \times A_1 \times A_1) = n(A_1) \cdot n(A_1) \cdot n(A_1) = 3^4 = 81$ төрт орундуу сан түзүүгө болот. **21.** Ар кандай бир, эки жана үч орундуу сандар 1000ден кичине болот. $3 + 3^2 + 3^3 = 3 + 9 + 27 = 39$ – 1000ден кичине сандардын саны. 2 жуп бир орундуу, 6 жуп эки орундуу, 18 жуп үч орундуу сандар бар. Баары: 26. 3кө эселүү 26 сан бар. **22.** $n(A_1 \times A_2) = n(A_1) \cdot n(A_2) = 6 \cdot 4 = 24$ түрдүү жол менен тандап алууга болот. **23.** $n(A_1 \times A_2) = 4 \cdot 5 = 20$ түрдүү жол менен түзүүгө болот. **24.** 30 10го бөлүнүүчү цифралары кайталануучу, 25 10го бөлүнүүчү цифралары кайталанбоочу үч орундуу сан түзүүгө болот. **25.** 900. **26.** 24. **27.** 12. **28.**120 код, жетет. **29.** 60. **30.** 20. **31.** 12. **32.** 15.

3-ГЛАВА

33. *Көрсөтмө*: $X \times X$ декарттык көбөйтүндүсүн табуу керек. **34.** е) $\bar{A}_7^2 + \bar{A}_4^3 = 7^2 + 4^3 = 79 + 64 = 143$, и) $\bar{A}_8^3 : \bar{A}_4^3 = 2^6 = 64$. **35.** 9. **36.** *Көрсөтмө*: $X \times X$ декарттык көбөйтүндүсүн табуу же таблица түзүү керек, 16 эки орундуу сан түзүүгө болот. **37.** $\bar{A}_7^3 = 343$. **38.** 8. **39.** 54. **40.** 256. **41.** 64. **42.** $(\bar{A}_{10}^3 - 1)\,\bar{A}_{26}^3 \cdot 9 = 17558424 \cdot 9 = 158025816$ номер түзүүгө болот. **43.** и) $\dfrac{11!+9!}{10!-9!}=\dfrac{9!\cdot 10\cdot 11+9!}{9!\cdot 10-9!}=\dfrac{9!\cdot(110+1)}{9!\cdot(10-1)}=\dfrac{111}{9}=$ $=12\dfrac{1}{3}$, м) $\dfrac{16!-15\cdot 15!-14\cdot 14!}{13!}=\dfrac{14!\cdot 15\cdot 16-14!\cdot 15\cdot 15-14\cdot 14!}{13!}=14$.

45. *Көрсөтмө*: граф тургузуу керек. Баары 6 вариант. **46.** 24. **47.** 8!. **48.** 6!. **49.** 5!. **50.** 6!. **51.** 4!. **52.** 3!. **53.** 192. **54.** 18. **55.** 600. **56.** е) 288, ж) 3326400. **57.** 20. **58.** 30. **59.** 210. **60.** 870. **61.** 13800. **62.** 120. **63.** 720. **64.** 5040. **65.** 60. **66.** A_8^4. **67.** A_{26}^5. **68.** а) A_{11}^2, б) A_{11}^3. **69.** 90. **70.** 900. **71.** а) $x_1=5$, б) $x_1=9$, в) $x_1=7$, г) $x_1=10$, д) $x_1=15$ е) $x_1=13$. **72.** 16. **73.** 25. **74.** ж) $\frac{7}{120}$, з) $\frac{1}{70}$. **75.** 6. **76.** 35. **77.** 28. **78.** 6. **79.** 826200. **80.** 10. **81.** 15. **82.** 28. **83.** 21. **84.** 35. **85.** 782. **86.** $C_3^1\cdot C_{30}^3=12180$. **87.** 120. **88.** 15150. **89.** а) 21; б) 11; в) 5; г) $x_1=11, x_2=6$; д) $x_1=14, x_2=3$; е) $x_1=9$; ж) $x_1=3$; з) $x_1=11$; $x_2=6$. **90.** а) $x_1=7$; б) $x_1=3$; в) $x=4$; г) $x_1=8$; д) $x_1=10$; е) $x=3$. **91.** а) $(12;5)$; б) $(18;8)$; в) $(6;3)$; г) $(12;5)$; д) $(2;6)$. **95.** 2^3. **96.** 2^{10}. **100.** г) $(x+2y)^4=C_4^0x^4(2y)^0+C_4^1x^3(2y)^1+C_4^2x^2(2y)^2+$ $+C_4^3x^1(2y)^3+C_4^4x^0(2y)^4$. **102.** а) мында $k=3$ болгондуктан $T_{3+1}=$ $=C_{10}^3x^{10-3}y^3=\frac{10!}{3!7!}x^7y^3=\frac{7!8\cdot 9\cdot 10}{6\cdot 7!}x^7y^3=120x^7y^3$. Демек, биномдун $k=3$-даражасын камтыган коэффициенти 120. **104.** 2^5. **105.** 2^4+2^3. **107.** 2^3. **109.** 151200. **110.** 21. **111.** 105. **112.** 1260. **113.** 420. **115.** $\bar{C}_3^2=6$. **116.** $\bar{C}_2^6$. **117.** $\bar{C}_7^2$. **118.** $\bar{C}_7^4$. **119.** $\bar{C}_7^4$. **120.** $\bar{C}_4^3$. **121.** $\bar{C}_8^{10}$. **122.** $\bar{C}_4^3=20$ – ар түрдүү үч бурчтуктар, $C_4^3=4$ – түрдүү жактуу үч бурчтутар, 4 – тең жактуу үч бурчтуктар, $20-4-4=12$ – тең капталдуу үч бурчтуктар.

ӨЗҮН-ӨЗҮ КӨЗӨМӨЛДӨӨ ҮЧҮН ТЕСТТИК СУРООЛОРДУН ЖООПТОРУ

1-ГЛАВА

1 г. **2** а. **3** а. **4** б. **5** а. **6** а. **7** б. **8** в. **9** а. **10** а. **11** в. **12** в. **13** а.**14** в. **15** г. **16** б. **17** а. **18** г. **19** б. **20** б. **21** а. **22** г. **23** б. **24** в. **25** г. **26** а. **27** б. **28** б. **29** г. **30** а. **31** в. **32** г. **33** а. **34** г. **35** в. **36** б . **37** б. **38** в. **39** а. **40** в. **41** б. **42** а. **43** б. **44** в. **45** в. **46** б. **47** в. **48** а. **49** г. **50** в. **51** в. **52** г. **53** г. **54** а. **55** а. **56** г. **57** б.

58 а. **59** в. **60** а. **61** в. **62** г. **63** а. **64** в. **65** а. **66** г. **67** а. **68** в. **69** а. **70** б. **71** б. **72** в. **73** а. **74** б. **75** в.

2-ГЛАВА

76 а. **77** в. **78** а. **79** в. **80** б. **81** а. **82** г. **83** б. **84** г. **85** б. **86** в. **87** б. **88** г. **89** а. **90** г. **91** а. **92** г. **93** а.

3-ГЛАВА

94 б. **95** в. **96** г. **97** а. **98** б. **99** в. **100** г. **101** г. **102** а. **103** в. **104** а. **105** б. **106** в. **107** а. **108** г. **109** а. **110** б. **111** в . **112** г. **113** г. **114** а. **115** б. **116** в. **117** г. **118** а. **119** б. **120** б. **121** в. **122** г. **123** а. **124** б. **125** в. **126** б. **127** а. **128** г. **129** а. **130** в. **131** б. **132** в. **133** г. **134** а. **135** б. **136** в. **137** г. **138** а. **139** б. **140** в.

1-тиркеме.

КОМБИНАТОРИКАНЫН НЕГИЗГИ ЗАКОНДОРУНУН ФОРМУЛАЛАРЫН ТАНДОО

СУММА ЭРЕЖЕСИ

$A \cap B = \emptyset$ → $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

$A \cap B \neq \emptyset$ → $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m = \emptyset$ → $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m)$

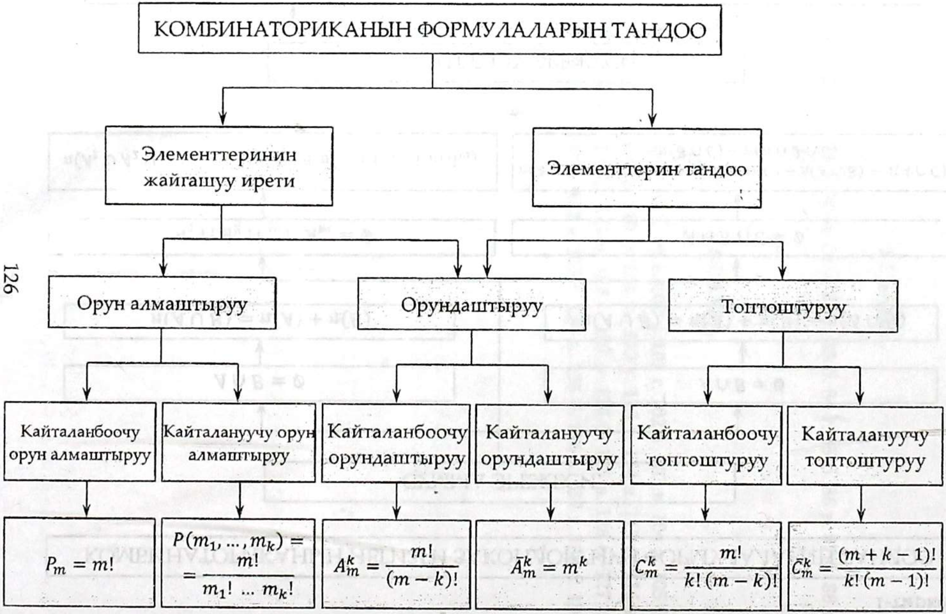
$A \cap B \cap C \neq \emptyset$ → $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

КӨБӨЙТҮНДҮ ЭРЕЖЕСИ

$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = m \cdot k$

$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$

2-тиркеме.


КОМБИНАТОРИКАНЫН ФОРМУЛАЛАРЫН ТАНДОО
Элементтеринин жайгашуу ирети
Элементтерин тандоо
Орун алмаштыруу
Орундаштыруу
Топтоштуруу
Кайталанбоочу орун алмаштыруу
Кайталануучу орун алмаштыруу
Кайталанбоочу орундаштыруу
Кайталануучу орундаштыруу
Кайталанбоочу топтоштуруу
Кайталануучу топтоштуруу
$P_m = m!$
$P(m_1, \dots, m_k) = \dfrac{m!}{m_1! \dots m_k!}$
$A_m^k = \dfrac{m!}{(m-k)!}$
$\bar{A}_m^k = m^k$
$C_m^k = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$
$\bar{C}_m^k = \dfrac{(m+k-1)!}{k!\,(m-1)!}$

АДАБИЯТТАР

1. Аматова Г.М., Аматов М.А. Математика. Книга 1. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. 240 бет.

2. Аматова Г.М., Аматов М.А. Математика. Упражнения и задачи. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. 332 бет.

3. Байгазиев К.Б. Арифметикалык амалдарды көптүктөр теориясы менен негиздөө. – Ош: «Кагаз ресурстары». – 2012. 112 бет.

4. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. 328 бет.

5. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М. и др. Математика. – М.: Просвещение, 1977. 352 бет.

6. Виленкин Н.Я. Задачник практикум по математике. – М.: Просвещение, 1977. 208 бет

7. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. – М.: Наука, 1977. 80 бет.

8. Ерош И.Л. Дискретная математика. Комбинаторика. – СПб.: СПбГУАБ, 2001. 37 бет.

9. Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л. Пособие по математике для студентов фак. нач. классов. – М.: Издательство «Институт практической психологии», 1998. 448 бет.

10. Стойлова Л.П. Математика. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. 464 бет.

11. Халамайзер А.Я. Комбинаторика и бином Ньютона. – М.: Просвещение, 1980. 30 бет.

$$A_m^k = k! \cdot C_m^k$$